

## KOSHI MASALASI YECHIMI MAVJUDLIGINI PIKAR KETMA-KET YAQINLASHISHLARI USULI ASOSIDA ISBOTLASH

*Safarboyeva Maftuna Aminboy qizi*

*Xorazm viloyati Osiyo xalqaro Universiteti*

*1-bosqich magistratura matematika yo'nalishi*

**Annotatsiya.** Mazkur maqolada birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasining yechimi mavjudligini isbotlash masalasi tahlil qilinadi. Tadqiqotda Koshi masalasi integral tenglamaga keltiriladi va Pikar ketma-ket yaqinlashishlari usuli orqali yechimning mavjudligi asoslanadi. Shuningdek, yechimning berilgan to'rtburchakli sohada aniqlanishi, funksiyaning uzluksizligi, chegaralanganligi va Lipshits sharti kabi yetarli shartlarning matematik mazmuni ochib beriladi. Maqolada nazariy isbot amaliy misol bilan mustahkamlanib, Lipshits sharti bajarilmagan holatda yechimning yagonaligi buzilishi mumkinligi ham ko'rsatib o'tiladi.

**Kalit so'zlar:** Koshi masalasi, oddiy differensial tenglama, Pikar usuli, ketma-ket yaqinlashishlar, mavjudlik teoremasi, Lipshits sharti, integral tenglama.

**Аннотация.** В данной статье рассматривается задача доказательства существования решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Задача Коши приводится к эквивалентному интегральному уравнению, после чего существование решения обосновывается методом последовательных приближений Пикара. Особое внимание уделяется условиям непрерывности, ограниченности функции и условию Липшица. Теоретические положения подтверждаются практическим примером, а также анализируется случай, когда нарушение условия Липшица приводит к потере единственности решения.

**Ключевые слова:** задача Коши, обыкновенное дифференциальное уравнение, метод Пикара, последовательные приближения, теорема существования, условие Липшица, интегральное уравнение.

**Abstract.** This article studies the proof of existence of a solution to the Cauchy problem for a first-order ordinary differential equation. The Cauchy problem is transformed into an equivalent integral equation, and the existence of a solution is justified by Picard's method of successive approximations. Particular attention is paid to the continuity and boundedness of the function, as well as the Lipschitz condition. The theoretical proof is supported by a practical example, and a case where the violation of the Lipschitz condition leads to non-uniqueness of solutions is also discussed.

**Keywords:** Cauchy problem, ordinary differential equation, Picard method,

successive approximations, existence theorem, Lipschitz condition, integral equation.

### Kirish

Oddiy differensial tenglamalar nazariyasi matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, u tabiiy fanlar, texnika, iqtisodiyot va biologik jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi. Dinamik jarayonlarni matematik ifodalashda ko'pincha noma'lum funksiya va uning hosilasi orasidagi bog'lanish beriladi. Bunday holatda masalaning to'liq aniqlanishi uchun faqat differensial tenglamaning o'zi yetarli bo'lmaydi, balki boshlang'ich shart ham berilishi zarur.

Differensial tenglama va boshlang'ich shartdan iborat masala matematik adabiyotlarda **Koshi masalasi** deb yuritiladi. Koshi masalasining eng muhim jihati shundaki, u berilgan boshlang'ich holatdan keyingi jarayonning qanday rivojlanishini aniqlashga imkon beradi. Shu sababli, bunday masalalar uchun eng avvalo quyidagi savollarga javob berish talab qilinadi: yechim mavjudmi? Agar mavjud bo'lsa, u yagona bo'ladimi? Yechim qaysi oraliqda aniqlanadi?

Mazkur maqolada birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasi qaraladi va uning yechimi mavjudligi Pikar ketma-ket yaqinlashishlari usuli yordamida isbotlanadi.

### Masalaning qo'yilishi

Quyidagi birinchi tartibli oddiy differensial tenglama berilgan bo'lsin:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Bu tenglamaga quyidagi boshlang'ich shart qo'yiladi:

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

(1) va (2) munosabatlar birgalikda Koshi masalasini tashkil qiladi:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

Bu yerda  $x_0$ — boshlang'ich nuqta,  $y_0$ — noma'lum funksiyaning shu nuqtadagi qiymati,  $f(x, y)$  esa berilgan funksiya hisoblanadi.

Koshi masalasini tekshirish uchun quyidagi to'rtburchakli sohani kiritamiz:

$$D = \{(x, y) \in R^2: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}. \quad (4)$$

Faraz qilamizki,  $f(x, y)$  funksiya  $D$  sohada uzluksiz bo'lsin. Dyopiq va chegaralangan soha bo'lgani uchun  $f(x, y)$  bu sohada chegaralangan bo'ladi. Demak, shunday  $M > 0$  son mavjudki,

$$|f(x, y)| \leq M, \quad (x, y) \in D. \quad (5)$$

Yechim grafigi  $D$ soha ichidan chiqib ketmasligi uchun  $h$ sonini quyidagicha tanlaymiz:

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad (6)$$

Natijada yechim quyidagi oraliqda izlanadi:

$$I = [x_0 - h, x_0 + h]. \quad (7)$$

### Lipshits sharti va uning ahamiyati

Koshi masalasida yechimning mavjudligi uchun funksiyaning uzluksizligi yetarli bo'lishi mumkin. Biroq yechimning yagonaligini ta'minlash uchun odatda kuchliroq shart — Lipshits sharti talab qilinadi.

**Ta'rif.** Agar  $D$ sohada ixtiyoriy  $(x, y_1)$  va  $(x, y_2)$  nuqtalar uchun shunday  $L > 0$  son mavjud bo'lib,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (8)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda  $f(x, y)$  funksiya yo'zgaruvchi bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi.

Bu shartning mazmuni shundan iboratki,  $f(x, y)$  unksiya yo'zgaruvchi bo'yicha haddan tashqari tez o'zgarib qolmaydi. Boshqacha aytganda, yqiyamatidagi kichik o'zgarish  $f(x, y)$  qiymatida ham nazorat qilinadigan o'zgarish keltirib chiqaradi.

### Koshi masalasini integral tenglamaga keltirish

(1) tenglamani  $x_0$  dan  $x$  gacha integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{dt} dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Bundan

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Boshlang'ich shart  $y(x_0) = y_0$  ekanligini hisobga olsak,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (9)$$

Demak, Koshi masalasining yechimini topish differensial tenglamani yechishdan ekvivalent integral tenglamani yechishga keltiriladi. Endi masalaning yechimi mavjudligini aynan (9) integral tenglama orqali isbotlash mumkin.

### Pikar ketma-ket yaqinlashishlari

Pikar usulining asosiy g'oyasi noma'lum  $y(x)$  funksiyaning ketma-ket yaqinlashuvchi funksiyalar orqali qurishdan iborat. Dastlab

$$y_0(x) = y_0 \quad (10)$$

deb olinadi. Keyingi hadlar quyidagi rekkurent formula bilan aniqlanadi:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Natijada quyidagi funksional ketma-ketlik hosil bo‘ladi:

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

Agar ushbu ketma-ketlik biror  $y(x)$  funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda limit funksiya (9) integral tenglamani qanoatlantiradi. Shu orqali Koshi masalasining yechimi mavjudligi isbotlanadi.

### Yechim mavjudligi teoremasi

**Teorema.** Agar  $f(x,y)$  funksiya  $D$  sohada uzluksiz va chegaralangan bo‘lsa hamda  $y$  bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda Koshi masalasi

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

kamida  $[x_0-h, x_0+h]$  oraliqda yechimga ega bo‘ladi. Agar Lipshits sharti ham bajarilsa, bu yechim yagona bo‘ladi.

**Isbot.** Avvalo, Pikar ketma-ketligi quyidagicha aniqlanadi:

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt,$$

umumiy holda esa

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt. \quad (12)$$

Birinchi navbatda, barcha  $y_n(x)$  funksiyalar  $I$  oraliqda aniqlangan va uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz.  $f(x,y)$  uzluksiz bo‘lgani sababli, har bir  $y_n(x)$  uzluksiz funksiyadir.

Endi  $y_n(x)$  funksiyalarning  $D$  soha ichida qolishini tekshiramiz. (5) ga asosan:

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt.$$

Bundan

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq M|x - x_0|. \quad (13)$$

Agar  $|x - x_0| \leq h$  bo‘lsa, (6) ga ko‘ra

$$M|x - x_0| \leq Mh \leq b.$$

Demak,

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq b.$$

Bu esa barcha  $y_n(x)$  funksiyalar grafigi  $D$  soha ichida qolishini bildiradi.

Endi ketma-ketlikning yaqinlashishini isbotlaymiz. Buning uchun quyidagi ayirmalarni baholaymiz:

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq M|x - x_0|. \quad (14)$$

Ikkinchi ayirma uchun Lipshtits shartidan foydalanamiz:

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))] dt \right|.$$

Lipshtits shartiga ko'ra:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt.$$

(14) baholashdan foydalanib,

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \int_{x_0}^x M|t - x_0| dt.$$

Demak,

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \frac{ML|x - x_0|^2}{2!}. \quad (15)$$

Xuddi shu tarzda induksiya orqali quyidagi umumiy bahoga ega bo'lamiz:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^n|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (16)$$

Agar  $|x - x_0| \leq h$  bo'lsa, u holda

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (17)$$

Quyidagi sonli qatorni qaraymiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (18)$$

Bu qator eksponensial qator bilan bog'liq bo'lib, yaqinlashuvchidir. Haqiqatan ham,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} (e^{Lh} - 1). \quad (19)$$

Demak, (18) qator yaqinlashadi. Veyershtrass alomatiga ko'ra, funksional qator

$$y_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)] \quad (20)$$

I oraliqda tekis yaqinlashadi. Shunday qilib,

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad (21)$$

mavjud bo'ladi va  $y(x)$  uzluksiz funksiyadir.

Endi  $y(x)$  funksiyaning (9) integral tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

(12) formulada  $n \rightarrow \infty$  limitga o'tamiz:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt.$$

Tekis yaqinlashish va  $f$  funksiyaning uzluksizligidan

$$f(t, y_n(t)) \rightarrow f(t, y(t))$$

kelib chiqadi. Shuning uchun integral ostida limitga o'tish mumkin:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (22)$$

Bu esa  $y(x)$  funksiya integral tenglama yechimi ekanligini bildiradi.

(22) tenglikdan  $x=x_0$  bo'lganda

$$y(x_0) = y_0$$

kelib chiqadi. Bundan tashqari, (22) tenglikni differensiallasak,

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Demak,  $y(x)$  funksiya Koshi masalasining yechimidir. Shu bilan yechimning mavjudligi isbotlandi.

### Yechimning yagonaligi haqida

Maqolaning asosiy maqsadi yechim mavjudligini isbotlash bo'lsa-da, Lipshits sharti mavjud bo'lgan holatda yechimning yagona bo'lishi ham muhim natija hisoblanadi.

Faraz qilaylik,  $y(x)$  va  $z(x)$  funksiyalar Koshi masalasining ikkita yechimi bo'lsin. U holda

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt.$$

Ayiramiz:

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt.$$

Modul olsak,

$$|y(x) - z(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt.$$

Lipshits shartidan:

$$|y(x) - z(x)| \leq L \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt. \quad (23)$$

Gronuoll–Bellman tengsizligiga ko'ra, agar uzluksiz va nomanfiy funksiya o'zining integraliga shu ko'rinishda bog'langan bo'lsa, u holda

$$|y(x) - z(x)| = 0.$$

Demak,

$$y(x) = z(x).$$

Bu esa yechimning yagonaligini ko'rsatadi.

### Amaliy misol

Quyidagi Koshi masalasini qaraymiz:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 1. \quad (24)$$

Bu yerda

$$f(x, y) = 2xy.$$

Funksiya butun  $\mathbb{R}^2$  tekislikda uzluksiz. Endi Lipshits shartini tekshiramiz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2xy_1 - 2xy_2| = 2|x||y_1 - y_2|.$$

Agar  $|x| \leq a$  bo'lgan chegaralangan sohada qaralsa, u holda

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2a|y_1 - y_2|.$$

Demak, Lipshits o'zgarmasi

$$L = 2a$$

bo'ladi. Shunday qilib, teorema shartlari bajariladi va Koshi masalasi yagona yechimga ega.

Endi Pikar ketma-ketligini tuzamiz. Boshlang'ich yaqinlashish:

$$y_0(x) = 1.$$

Birinchi yaqinlashish:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2t \cdot 1 dt = 1 + x^2.$$

Ikkinchi yaqinlashish:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 2t(1 + t^2) dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Uchinchi yaqinlashish:

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 2t \left( 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \right) dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}.$$

Umumiy holda:

$$y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}. \quad (25)$$

Limitga o'tsak:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}. \quad (26)$$

Demak, Koshi masalasining yechimi

$$y = e^{x^2}$$

ko'rinishida bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$y' = 2xe^{x^2},$$

$$2xy = 2xe^{x^2}.$$

Shuningdek,

$$y(0) = e^0 = 1.$$

Demak, topilgan funksiya berilgan Koshi masalasini qanoatlantiradi.

### **Lipshits sharti bajarilmagan holat**

Yechim mavjudligi va yagonaligi masalasida Lipshits shartining ahamiyatini ko'rsatish uchun quyidagi Koshi masalasini qaraymiz:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0. \quad (27)$$



Bu yerda

$$f(x, y) = 3y^{2/3}.$$

Funksiya  $y=0$  nuqta atrofida uzluksiz. Biroq uning  $y$  bo'yicha hosilasi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3} \quad (28)$$

ko'rinishga ega bo'lib,  $y \rightarrow 0$  da cheksizlikka intiladi. Demak,  $y=0$  atrofida Lipshits sharti bajarilmaydi.

Bu masala kamida ikkita yechimga ega:

$$y_1(x) = 0,$$

va

$$y_2(x) = x^3.$$

Haqiqatan,

$$y_2'(x) = 3x^2,$$

$$3(y_2)^{2/3} = 3(x^3)^{2/3} = 3x^2.$$

Shuningdek,

$$y_2(0) = 0.$$

Demak,  $y_1(x)=0$  ham,  $y_2(x)=x^3$  ham berilgan Koshi masalasining yechimidir. Bu misol shuni ko'rsatadiki, funksiyaning uzluksizligi yechim mavjudligi uchun muhim bo'lsa-da, yagonalikni ta'minlash uchun Lipshits sharti alohida ahamiyatga ega.

### Xulosa

Koshi masalasi differensial tenglamalar nazariyasida markaziy o'rin tutadi. Chunki ko'plab tabiiy va amaliy jarayonlar aynan boshlang'ich shartli differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Maqolada birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasi qaralib, uning yechimi mavjudligi Pikar ketma-ket yaqinlashishlari usuli orqali isbotlandi.

Tahlil shuni ko'rsatadiki,  $f(x,y)$  funksiyaning berilgan sohada uzluksiz va chegaralangan bo'lishi yechimning lokal mavjudligini asoslashda muhim rol o'ynaydi. Lipshits sharti esa nafaqat Pikar ketma-ketligining nazoratli yaqinlashishini ta'minlaydi, balki yechimning yagona bo'lishi uchun ham yetarli shart vazifasini bajaradi.

Pikar usuli orqali qurilgan

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

ketma-ketlikning tekis yaqinlashishi natijasida limit funksiya hosil qilinadi. Ushbu limit funksiya integral tenglamani, demak, boshlang'ich Koshi masalasini qanoatlantiradi. Shu bois Pikar ketma-ket yaqinlashishlari usuli Koshi masalasi yechimi mavjudligini isbotlashda eng qulay va konstruktiv usullardan biri hisoblanadi.



## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Pontryagin L. S. *Oddiy differensial tenglamalar*. — Moskva: Nauka, 1982.
2. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. — New York: McGraw-Hill, 1955.
3. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. — Philadelphia: SIAM, 2002.
4. Teschl G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. — Providence: American Mathematical Society, 2012.
5. Arnold V. I. *Ordinary Differential Equations*. — Berlin: Springer, 1992.
6. Walter W. *Ordinary Differential Equations*. — New York: Springer, 1998.
7. Filippov A. F. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
8. Hale J. K. *Ordinary Differential Equations*. — New York: Wiley-Interscience, 1969.
9. Salohiddinov M. S. *Oddiy differensial tenglamalar kursi*. — Toshkent: O'zbekiston, 1994.
10. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P. P. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. — Berlin: Springer, 1984.