

DOIRAVIY KESIMLI STERJENNING ELASTIK-PLASTIK BURALISH JARAYONINING MATEMATIK TAHLILI

Xolmo‘minov Sherbek Abduhomid o‘g‘li ¹⁾,

Saydullayeva Sitora Axmat qizi ²⁾

^{1), 2)} Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada ko‘ndalang kesimi doiraviy bo‘lgan sterjenning sof buralish jarayonida yuzaga keladigan elastik–plastik holatlar matematik jihatdan tahlil qilingan. Materialning elastik va plastik xususiyatlari hamda qattiqlashish effekti hisobga olinib, urinma kuchlanishlarning kesim bo‘yicha taqsimlanishi aniqlangan. Burovchi moment bilan burilish burchagi orasidagi bog‘lanishlar Naday nazariyasi asosida olib chiqilgan. Shuningdek, yuklanish va yuksizlanish jarayonlarida hosil bo‘ladigan qoldiq kuchlanishlar va qoldiq burilish burchaklari uchun analitik ifodalar keltirilgan.

Kalit so‘zlar. doiraviy sterjen, sof buralish, elastik-plastik deformatsiya, urinma kuchlanish, burovchi moment, qattiqlashish moduli, Naday nazariyasi, qoldiq kuchlanish, plastik sharnir.

Abstract. This article provides a mathematical analysis of elastic-plastic states arising during pure torsion of a rod with a circular cross-section. The distribution of tensile stresses across the cross-section is determined taking into account the elastic-plastic properties of the material and the hardening effect. Based on Nadey's theory, relationships between the torsional moment and the angle of torsion are derived. Analytical expressions for residual stresses and residual angles of torsion arising during loading and unloading are also presented.

Keywords: round bar, pure torsion, elastic-plastic deformation, tensile stress, torque, hardening modulus, Naday theory, residual stress, plastic hinge.

KIRISH

Mashinasozlik, qurilish va mexanika sohalarida qo'llaniladigan ko'plab konstruktiv elementlar ish jarayonida burilish yuklamalariga duch keladi. Ayniqsa, doiraviy kesimli sterjenlar val, o'q va turli uzatmalar tarkibida keng qo'llanilishi sababli, ularning sof buralishdagi xatti-harakatini chuqur o'rganish muhim ahamiyat kasb etadi. Materiallar qarshiligi fanida elastik sohadagi buralish masalalari yetarlicha o'rganilgan [1]. Ammo, real sharoitlarda materiallarning elastiklik chegarasidan o'tishi natijasida yuzaga keladigan elastik–plastik holatlar alohida ilmiy tahlilni talab etadi [2, 3].

Sterjenning elastik–plastik buralish jarayonida urinma kuchlanishlar kesim bo'yicha chiziqli taqsimlanishdan chetga chiqib, plastik sohalarning hosil bo'lishiga olib keladi. Bu esa burovchi moment bilan burilish burchagi orasidagi bog'lanishni murakkablashtiradi hamda qoldiq kuchlanish va deformatsiyalarning paydo bo'lishiga sabab bo'ladi. Shu nuqtai nazardan, materialning qattiqlashish xususiyatlarini hisobga olgan holda elastik–plastik yoki nochiziqli buralishning matematik modelini ishlab chiqish muhim ilmiy va amaliy masalalardan biridir [4, 5, 6].

Mazkur maqolada doiraviy kesimli sterjenning sof buralishidagi elastik–plastik jarayonlar Naday nazariyasi asosida tahlil qilinib, burovchi moment, urinma kuchlanishlar va burilish burchagi o'rtasidagi bog'lanishlar aniqlanadi. Shuningdek, yuklanishdan so'ng yuksizlanish jarayonida hosil bo'ladigan qoldiq kuchlanishlar va qoldiq burilish burchaklari uchun analitik ifodalar keltirilib, ularning fizik mazmuni yoritib beriladi.

METOD

Radiusi $r = a$ ga teng, ko'ndalang kesim yuzasi doiraviy bo'lgan sterjen M_z burovchi momentlar ta'sirida bo'lsin. (1-rasm). U holda, bizga materiallar qarshiligi fanidan ma'lumki, M_z burovchi moment ta'siridagi elastik sterjenning, har qanday

kesimida hosil bo'ladigan urinma kuchlanishlari, markaziy o'qdan r radiusli masofaga to'g'ri proporsionaldir. Bunda, sterjen uzunlik birligiga to'g'ri keluvchi burilish burchagi, ya'ni, nisbiy burilish burchagi θ bilan belgilansa, u holda elastik urinma kuchlanishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\tau = Gr\theta = \frac{2M_z r}{\pi a^4}, \quad (1)$$

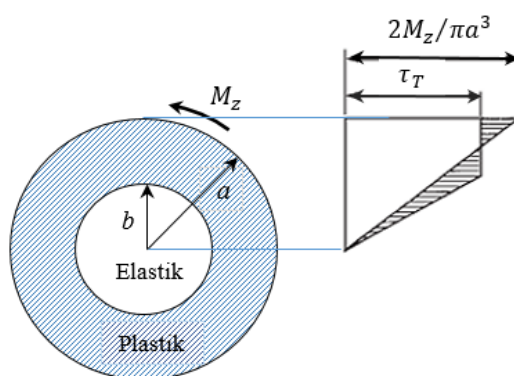
bu yerda G – siljish moduli.

Doiraviy elastik-plastik sterjenning buralishi masalasini yechishda ham, sterjen ko'ndalang kesimi yuzasi elastiklik chegarasidan keyin ham o'zgarmay qolishi kerak deb hisoblanadi. Bunday holda, tenzor kuchlanishi komponentalaridan $\tau_{\theta z}$, tenzor deformatsiya komponentalaridan $\gamma_{\theta z}$ boshqa barcha komponentalar nolga teng bo'ladi.

Urinma kuchlanishi $r = a$ da eng katta qiymatga ega bo'lganligi sababli, burovchi moment M_T ga yetganda va bunga mos keladigan nisbiy burilish burchagi θ_T ga teng bo'lganda, sterjen kesimi radiusda egilish boshlanadi. Bunda $r = a$ uchun $\tau_{\theta z} = \tau_T$ ni tenglab, (1) formulaga qiyosiy ravishda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$M_T = \frac{1}{2} \pi \tau_T a^3; \quad \theta_T = \frac{\tau_T}{Ga} \quad (2)$$

Momentning yanada oshishi bilan chegara yaqinida plastik halqa sohasi hosil bo'ladi, buning natijasida, elastiklik materialning markaziy sohasi b radiusida qoladi (2-rasm).



2-rasm. Bir jinsli silindrsimon elastik-plastik sterjenningi buralishi

Elastik sohada kuchlanish taqsimoti chiziqli bo'lib, urinma kuchlanishi $r = b$ da τ_T qiymatiga yetadi. Qattiqlashmaydigan materiallar uchun urinma kuchlanishi butun plastik sohada doimiy $\tau_T = const$ qiymatiga ega va kuchlanish taqsimoti butun sohada quyidagicha bo'ladi [2, 3]:

$$\begin{cases} \tau_{\theta z} = \tau_T \frac{r}{b}; & 0 \leq r \leq b, \\ \tau_{\theta z} = \tau_T; & b \leq r \leq a. \end{cases} \quad (3)$$

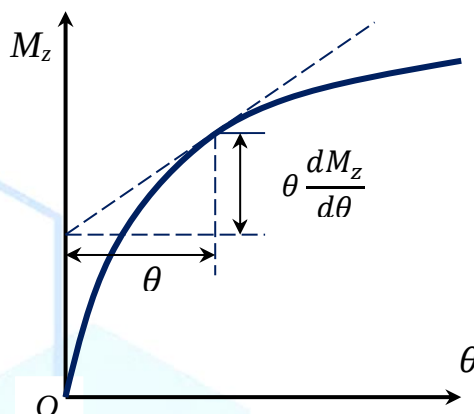
Elastik sohadagi urinma kuchlanishi ham $Gr\theta$ ga teng bo'lgani uchun, bu sohada ham $\theta = \tau_T / Gb$ ga teng bo'ladi. U holda burovchi momentni quyidagicha hisoblaymiz:

$$M_z = 2\pi \int_0^a \tau_{\theta z} r^2 dr = \frac{2}{3} \pi \tau_T \left(a^3 - \frac{b^3}{4} \right) = \frac{1}{3} M_T \left[4 - \left(\frac{\theta_T}{\theta} \right)^3 \right] \quad (4)$$

Elastoplastik burilish davom etar ekan, moment tezda $\frac{2}{3} \pi \tau_T a^3$ ning to'liq plastik qiymatiga yaqinlashadi. θ cheksizlikka va b nolga intilganligi sababli, burilish burchagining barcha cheklangan qiymatlarida, materialning elastik yadrosi bo'lishi kerak. Shuning uchun, buralgan materialda aniq belgilangan elastiklik va plastik chegarasi yo'q. Har qanday r radiusidagi nisbiy siljish deformatsiyasi $\gamma_{\theta z} = r\theta$ ga teng bo'lganligi sababli, momentni quyidagicha ifodalab yozish mumkin:

$$M_z = 2\pi \int_0^a \tau_{\theta z} r^2 dr = \frac{2\pi}{\theta^3} \int_0^{a\theta} \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}^2 d\gamma_{\theta z}. \quad (5)$$

Urinma kuchlanishining materialning deformatsiyasiga bog'liqligining grafigi, ya'ni, egri chizig'i berilganda, momentni ma'lum nisbat $(\tau_{\theta z}, \gamma_{\theta z})$ yordamida hisoblash mumkin. Aksincha, agar momentning butun sterjen uchun buralishga bog'liqligi (M_z, θ) eksperimental ravishda aniqlangan bo'lsa, unda urinma kuchlanishining deformatsiyaga bog'liqligi egri chizig'ini osongina olish mumkin 3-rasm.



3-рasm. Qaralgan sterjen uchun Naday nazariyasiga asoslanib chizilgan grafik.

Yuqorida aytilgan fikrlarimizni to'ldirish uchun, quyidagilarni tushintirib o'tsak. Ya'ni, yuqoridagi (5) tenglamaning θ ga nisbatan differensiallanishidan quyidagi tenglamani hosil qilamiz [2]:

$$\frac{d}{d\theta}(M_z \theta^3) = 2\pi a^3 \theta^2 \tau_a, \quad (6)$$

bu erda τ_a urinma kuchlanish $\tau_{\theta z}$ ning $r = a$ dagi qiymati; bu erda nisbiy siljish deformatsiyasi $\gamma_a = a\theta$ ga teng. Shunday qilib, τ_a va γ_a o'rtasidagi nisbat quyidagicha aniqlanadi:

$$\tau_a = \frac{1}{2\pi a^3} \left(\theta \frac{dM_z}{d\theta} + 3M_z \right). \quad (7)$$

Qavs ichidagi birinchi hadning geometrik ma'nosi (3-rasm) da ko'rsatilgan. Bunda, $dM_z/d\theta$ qiymatni, (M_z, θ) egri chizig'i asosida faqat sonli yoki grafik ravishda aniqlash mumkin. (7) ga asoslangan hisoblashda, egri chiziqning boshlang'ich qismida unchalik aniq natija bermaydi. Biroq, urinma kuchlanishini quyidagi shaklda o'zgartirish orqali aniqlikni oshirish mumkin

$$\tau_a = \frac{1}{2\pi a^3} \left[\theta^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{M_z}{\theta} \right) + 4M_z \right]. \quad (8)$$

Bu (8) tenglamadagi M_z/θ nisbat, elastik bosqichda doimiy bo'lib, plastik bosqichning boshlang'ich qismida asta-sekin kamayadi. Shunday qilib, qavs ichidagi birinchi hadning qiymati kichikdir. Egri chiziqning keyingi qismida, ya'ni,

qattiqlikning ortishi juda kam bo'lgan holatda, (7) formula ancha qoniqarli natijalar beradi.

Elastik-plastik buralish paytida elastik va plastik sohalarda radiusining ortishi bilan urinma kuchlanish kuchayadi. Har qanday plastik elementdagi umumiy ekvivalent deformatsiya $\frac{r\theta - \tau/G}{\sqrt{3}}$ ga teng bo'lganligi sababli, deformatsiyani qattiqashtirishning taxminiy qonuni quyidagicha hisobga olingan [Adab.]:

$$\tau_{\theta} = \tau_T + \frac{H}{3} \left(r\theta - \frac{\tau_{\theta}}{G} \right); \quad \theta = \frac{\tau_T}{Gb},$$

bu yerda b -elastiklik va plastiklik chegarasining radiusi; H -metal materiali uchun qattiqlashish moduli. Bunda, θ qiymatini almashtirib, biz plastiklik sohasidagi urinma kuchlanishini quyidagicha olamiz:

$$\tau_{\theta} = \tau_T \left(\frac{3Gb + Hr}{3Gb + Hb} \right); \quad b \leq r \leq a. \quad (9)$$

NATIJARLAR VA MUHOKAMA

Endi, yuqoridagi (3) kuchlanishlar taqsimotining ikkinchi ifodasini (9) ifoda bilan almashtirib, ularni $M_z = 2\pi \int_0^a \tau_{\theta} r^2 dr$ da hisobga olamiz. Natijada, bir qancha hisoblash va soddalashtirishlardan so'ng quyidagini hosil qilamiz:

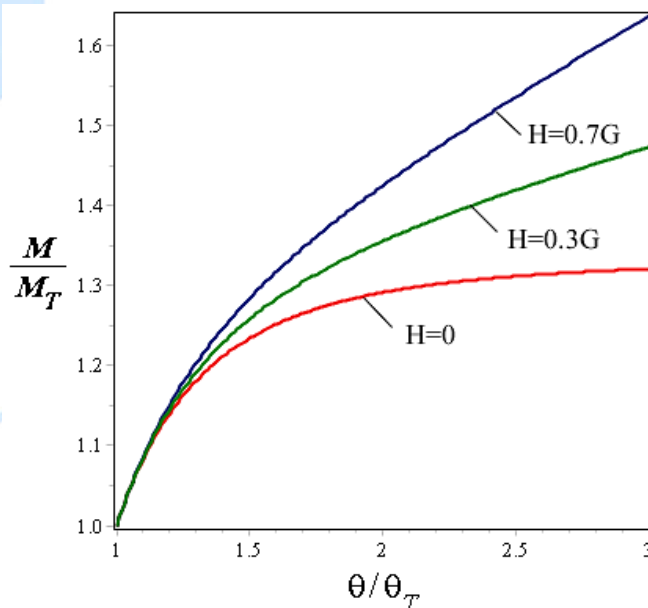
$$M_z = \frac{2\pi\tau_T a^3}{3 + \frac{H}{G}} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^3 - \frac{Ha}{Gb} \right] \right\}. \quad (10)$$

Agar (10) formulada $H=0$ bo'lsa, undan (4) formulaning aynan o'zi kelib chiqadi.

Endi, (10) formulada, yuqoridagi (2) formulalarni hisobga olib, sterjenning elastik-plastik oralig'ida sof buralishi bilan momentning buralishga bog'liqligi ifodasini hosil qilamiz:

$$M_z = \frac{M_T}{3 + \frac{H}{G}} \left\{ 4 - \left[\left(\frac{\theta_T}{\theta} \right)^3 - \frac{H}{G} \frac{\theta}{\theta_T} \right] \right\}. \quad (11)$$

Natijada, bu (11) formuladan, $H = 0$, $H = 0.3G$ va $H = 0.7G$ bo'lgan holatlar uchun M_z/M_T ning θ/θ_T ga bog'liqligi grafiklarini (4-rasm)da ko'rsatib o'tamiz:



4-rasm. Ko'ndalang kesim yuzasi doiraviy sterjenning elastik-plastik oralig'ida momentning burilishga bog'liqligi.

Sterjen yuklanganda $M_z > M_T$ dan so'ng yuksizlantirilsa, natijada, kuchlanishlarni kesimda tekis taqsimlanmasligidan qoldiq $\tilde{\tau}_{\theta z}$ kuchlanish hosil bo'ladi. Buni quyidagi ayirma bilan ifodalaymiz:

$$\tilde{\tau}_{\theta z} = \tau_{\theta z} - \tau_{\theta z}^*,$$

bu yerda $\tau_{\theta z}$ -yuklanishda hosil bo'ladigan kuchlanish; $\tau_{\theta z}^*$ -yuksizlanish natijasida hosil bo'ladigan kuchlanish bo'lib, Ilyushin yuksizlanish teoremasiga ko'ra quyidagi formuladan aniqlanadi $\tau_{\theta z}^* = \frac{2M_z r}{\pi a^4}$. Bunda, M_z ni (10) formuladan olgan holda, qoldiq kuchlanish taqsimotini quyidagicha ifodalaymiz:

$$\frac{\tilde{\tau}_{\theta z}}{\tau_T} = \frac{r}{b} - \frac{r}{a} \cdot \frac{4 - (b^3/a^3) + (H/G)(a/b)}{3 + (H/G)}; \quad 0 \leq r \leq b, \quad (12)$$

$$\frac{\tilde{\tau}_{\theta z}}{\tau_T} = \frac{3 + (H/G)(r/b)}{3 + (H/G)} - \frac{r}{a} \cdot \frac{4 - (b^3/a^3) + (H/G)(a/b)}{3 + (H/G)}; \quad b \leq r \leq a, \quad (13)$$

Bu (12) va (13) formulalar asosida qoldiq kuchlanish epyurasini yuklangan sterjen uchun $M_z > M_T$ bo'lganda qurish mumkin. Umuman olganda, kuchlanish epyurasi $\tau_{\theta z}$ ko'ndalang kesim bo'yicha siljish diagrammasini ifodalaydi, bunda absissa o'qi bo'ylab $r = \frac{\gamma_{\theta z}}{\theta}$ qo'yiladi. Xuddi shu ketma-ketlikda nisbiy buralish burchagini ham topish mumkin:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*,$$

bu yerda θ , yuklanish $M_z > M_T$ bo'lgandagi nisbiy buralish burchagi; θ^* - yuksizlanishdagi buralish burchagi.

To'liq yuksizlanish holatida birlik uzunlikka nisbatan elastik ravishda orqaga buralish burchagi $\theta^* = \frac{2M_z}{\pi G a^4}$ ga teng bo'ladi, bu yerda M_z , (10) formuladan olinadi. U holda, birlik uzunlikdagi qoldiq burilish burchagi quyidagicha ifodalanadi:

$$\tilde{\theta} = \frac{\tau_T}{G b} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^3 - \frac{H}{3G} \right] \quad (14)$$

Bu formulada qavs tashqarisidagi koeffitsiyent yuklanishdan ozod qilingandan keyingi buralish burchagi qiymatidir, qavs ichidagi ifoda esa elastik-plastik chegaradagi qoldiq qiymatini ifodalaydi. Berilgan elastik-plastik buralish holati uchun, H qattiqlashish tezligi oshgani sayin qoldiq burilish burchagi kamayadi.

Agar elastik soha to'liq yo'qolsa jism materiali to'liq plastiklik holatiga o'tadi va unda plastik sharnir hosil bo'ladi. Ya'ni, yuqoridagi (14) formulada, $b \rightarrow 0$ da $\tilde{\theta} \rightarrow \infty$ bo'ladi. Bu holatda, burovchi moment ta'sirida hosil bo'lgan plastik sharnirga $(M_{ch})_z$ moment chegarasi deyiladi.

Agar material qattiqlashmagan bo'lsa ($H=0$), (11) formuladan $\theta \rightarrow \infty$ bo'lgan holda

$$(M_{ch})_z = \frac{4}{3} M_T$$

bo'ladi. Bu holatda, sterjen, oquvchanlik chegarasida bo'lib, mustahkamligini yo'qotgan bo'ladi.

XULOSA

Mazkur tadqiqotda doiraviy kesimli sterjenning sof buralishidagi elastik–plastik jarayonlar har tomonlama matematik jihatdan tahlil qilindi. Sterjen kesimi bo'yicha urinma kuchlanishlarning elastik va plastik sohalaridagi taqsimlanish qonunlari aniqlandi hamda burovchi momentning burilish burchagiga bog'liqligi uchun umumiy analitik ifodalar olindi.

Qattiqlashish moduli hisobga olingan holda olingan natijalar materialning real mexanik xususiyatlarini yanada to'liqroq aks ettirishini ko'rsatdi. Yuklanishdan keyingi yuksizlanish jarayonida hosil bo'ladigan qoldiq kuchlanishlar va qoldiq burilish burchaklari uchun chiqarilgan formulalar sterjenlarning mustahkamlik va xizmat muddatini baholashda muhim ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR

1. Ismayilov K. Materiallar qarshiligi. Darslik, Potsdam (Gyemaniy) Lambyert Academic Publishing 2021. 598 b.
2. **Nadai A.** Theory of Flow and Fracture of Solids. — New York: McGraw-Hill, 1950. — Vol. 1.
3. **Ильюшин А.А.** Пластичность. — М.: Гостехиздат, 1948. — 376 с.
4. **Belyaev A.K., Altenbach H., Eremeyev V.A.** Nonlinear torsion of rods made of elastoplastic materials // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. — 2018. — Vol. 30. — pp. 1–15.
5. Khudoynazarov, Jamshid N. Abdurazakov, Dilshod Kholikov. Nonlinear torsional vibrations under the action of impact from the end of the rod. *AIP Conf. Proc.* 3177, 050014 (2025) <https://doi.org/10.1063/5.0295371>
6. Erofeev V.I., Lampsey B.B. Nonlinear mathematical model of an elastic rod undergoing torsional vibrations, taking into account the deplanation of the cross section // Bulletin of scientific and technical development. No. 4 (80), 2014. P. 12-15.