

HILBERT FAZOSI VA UNING TATBIQLARI.

Saidov Asqar Hayitnazarovich

Buxoro davlat texnika universiteti akademik litseyi

Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada Hilbert fazosi hamda Evklid fazosi haqida tushunchalar, ta'rif, teoremlar keltirilgan bo'lib, uning matematika fanidagi ahamiyati yoritib berilgan.

Kalit so'zlar. Hilbert fazosi, Evklid fazosi, to'la Evklid fazosi.

Annotation. This article presents concepts, definitions, and theorems about Hilbert space and Euclidean space, and highlights the importance of the association of mathematical fanatics.

Keywords. Hilbert space, Euclidean space, full Euclidean space.

To'la Evklid fazolarini qaraymiz. Bizni faqat cheksiz o'lchamli Evklid fazolari qiziqtiradi, chunki o'lchamli Evklid fazolari R^n ga fazoda izomorfdir.

To'la evklid fazolari haqida qisqacha tushuncha berib o'tamiz.

1-ta'rif. E evklid fazosi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazosi deyiladi.

1-teorema. (Riss –Fisher teoremasi.) $\{\Phi_n\}$ -E to'la Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema va $c_1, c_2, \dots, c_n$ sonlar shunday bo'lsinki, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ qator yaqinlashsin .

U holda shunday $f \in E$ element mavjudki,

$c_k = (f, \Phi_k)$ $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ va $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. E to'la evklid fazosida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n = \sum c_k \Phi_k$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday

$n(\varepsilon) > 0$ mavjudki barcha $n > n(\varepsilon)$ $p \in N$ larda

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\Phi_{n+1} + \dots + c_{n+p}\Phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{f_n\}$ fundamental ketma-ketlik E ning to'laligiga ko'ra

$\{f_n\}$ ketma-ketlik biror $f \in E$ elementga yaqinlashadi. Istalgan $i \in N$ uchun

$(f, \Phi_i) = (f_n, \Phi_i) - (f - f_n, \Phi_i)$ tenglik o'rinli, bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi

qo'shiluvchi $n \geq i$ da c_i ga teng ikkinchi qo'shiluvchi esa $n \rightarrow \infty$ nolga intiladi, chunki

$$|(f - f_n, \Phi_i)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\Phi_i\| = \|f - f_n\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Bu tenglikning chap tomoni n gab bog'liq emas, shuning uchun $n \rightarrow \infty$ da limitga

o'tsak $(f, \Phi_i) = c_i$ aniqlanishiga ko'ra f

$$\|f - f_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ uchun}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

2-teorema. To'la separabel evklid fazosidagi $\{\Phi_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lishi

uchun E da $\{\Phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan nolmas

elementning mavjud bo'lmashligi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriylik. Faraz qilaylik $\{\Phi_n\}$ to'la sistema bo'lsin u holda teorema shartiga

ko'ra u yopiq ham bo'ladi. Agar f element $\{\Phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga

orthogonal bo'lsa u holda uning barcha Fure koeffitsiyentlari nolga teng ya'ni $c_n = 0$

bo'ladi. U holda Parseval tengligiga ko'ra

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

ya'ni $f = 0$

Yetarlilik. Teskarisini faraz qilaylik, $\{\Phi_n\}$ to'la bo'lmagan sistema bo'lsin ya'ni E da

shunday $g \neq 0$ element mavjudki

$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ bu yerda $c_k = (g, \Phi_k)$ tenglik bajarilsin. Riss-Fisher

teoremasiga asosan shunday $f \in E$ element mavjudki

$$(f, \Phi_k) = c_k \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Bu holda f - g element barcha $\{\Phi_n\}$ larga orthogonal bo'ladi.

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g) \text{ tengsizlikdan } f - g \neq 0 \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

2-ta'rif. Cheksiz o'lchamli evklid fazosi Hilbert fazosi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy tabiatli $f, g, u, \dots$ elementlarning H to'plami Hilbert fazosi bo'lsa, u quyidagicha uchta shartni bajaradi:

- 1) H -Evklid fazosi ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo
- 2) $P(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$ metrika ma'nosida H -to'la fazosi
- 3) H fazo –cheksiz o'lchamli ya'ni, unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

Odatda, separable Hilbert fazolari qaraladi, ya'ni H ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud. Bundan keyin biz faqat seperabel Hilbert fazolarini qaraymiz.

3-ta'rif. Agar R va R^n evklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \leftrightarrow x^* \quad y \leftrightarrow y^* \quad x, y \in R \quad y^*, x^* \in R^n$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^* \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad \text{va} \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatda kelib chiqsa R va R^n lar izomorf fazolar deyiladi.

Boshqacha aytganda, evklid fazolarining izomorfligi shundan iboratki bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, bu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmanni saqlaydi.

Ma'lumki, n -o'lchovli ixtiyoriy ikkita evklid fazosi izomorfdir. Cheksiz o'lchamli evklid fazolari izomorf bo'lishi shart emas. Masalan, l_2 va $C_2[a, b]$ fazolar izomorf emas. Chunki l_2 to'la $C_2[a, b]$ to'la emas.

Quyidagi teorema o`rinli.

3-teorema. Ixtiyoriy ikkita separable Hilbert fazosi o`zaro izomorfdir.

Isbot. Ixtiyoriy H Hilbert fazosini l_2 fazoga izomorfligini ko`rsatamiz. Agar shuni ko`rsatsak, teorema isbot bo`lgan bo`ladi. H Hilbert fazosidan ixtiyoriy $\{\theta_n\}$ to`la ortonormal sistemani olamiz va  $f \in H$  elementga uning Furie koeffitsiyentlari bo`lgan $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ketma-ketlikni mos qo`yamiz. Bissel tengsizligiga ko`ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

Shuning uchun $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ ketma-ketlik l_2 fazoning elementi bo`ladi. Teskarisi. Riss –Fisher teoremasiga ko`ra l_2 fazoning ixtiyoriy $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementiga ko`ra (ketma-ketligiga)  $H$  fazoning yagona  $f$  elementi mos keladi va uning Furie qatori koeffitsiyentlari bo`lib $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar xizmat qiladi. O`rnatilgan bu moslik o`zaro bir qiymatlidir. Agar

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \text{ va } g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$$

bo`lsa, u holda

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n, \dots)$$

va

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \dots, \alpha c_n, \dots)$$

va nihoyat, persevel tengligidan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

va

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2 * (f, g) + (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2 * \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

bu yerdan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (c, d)$$

shunday qilib, biz o`rnatgan molik izomorffizm ekan, ya`ni bu moslik chiziqli amallarni va skalyar ko`paytmani saqlaydi.

Isbotlangan teoremadan shunday xulosa kelib chiqadiki izomorfizm aniqligida faqat l_2 Hilbert fazosi mavjud ekan. Boshqacha aytganda l_2 fazo H Hilbert fazosining “koordinata ko`rinishi” desak bo`ladi.

H Hilbert fazosining qism fazosi deganda yopiq qism fazoni tushunamiz. Hilbert fazosining qism fazolariga misollar keltiramiz.

Misol. $h \in H$ –ixtiyoriy element bo'lsin. h ga orthogonal bo'lgan barcha $f \in H$ elementlar to'plami qism fazo tashkil qiladi.

1-lemma. R separable evklid fazosining har qanday R qismi yana separabeldir.

Hilbert fazosining qism fazolari ayrim maxsus xossalarga egaki, ixtiyoriy normalangan fazoning qism fazolari bu xossalarga ega emas. Bu xossalar Hilbert fazoda kiritilgan skalyar ko'paytma va unga mos ortogonallik tushunchasiga asoslangan.

H separabel Hilbert fazosining M qism fazosi berilgan bo'lsin. bu qism fazoning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli sistema olamiz va unga ortogonallashtirilgan jarayonini qo'llab quyidagi teoreмага ega bo'lamiz.

Agar H Hilbert fazosi separabel bo'lsa uning ixtiyoriy qismi ham separabel bo'ladi. Bu quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

4-teorema. H separabel Hilbert fazosining ixtiyoriy M qism fazosi shunday $\{\theta_n\}$ ortonormal sistema mavjudki uning chiziqli qobig'ining yopig'i M ga teng. Bizda H Hilbert fazosining M qism fazosi berilgan bo'lsin. barcha $f \in M$ elementlarga ortogonal bo'lgan $g \in H$ elementlar to'plamini $M^\perp = H \ominus M$ orqali belgilaymiz.

$$M^\perp = \{g \in H : (f, g) = 0, \forall f \in M\}$$

$M^\perp$ ham H ning qism fazosi ekanligini isbotlaymiz. Bu to'plamning qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqligini ko'rsatamiz. Agar $g_1, g_2 \in M^\perp$ bo'lsa, u holda

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = \alpha_1 (g_1, f) + \alpha_2 (g_2, f) = 0$$

Endi $M^\perp$ to'plamning yopiqligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\{g_n\} \subset M^\perp$ elementlar ketma-ketligi $g \in H$ elementga yaqinlashsin. U holda, skalyar ko'paytmaning uzluksizligiga ko'ra, istalgan $f \in M$ uchun

$$(g; f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n; f) = 0$$

Demak, $g \in M^\perp$, ya'ni $M^\perp$ yopiq qism fazo bo'lar ekan. $M^\perp$ qism fazo M qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi deyiladi.

5- teorema. Agar M - N Hilbert fazosining yopiq qism fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f \in H$ element yagona usul bilan $f = h + h^1$ yig'indisiga yoyiladi, bu yerda $h \in M, h^1 \in M^\perp$.

Isbot. Avvalo, bu yoyilmaning mavjudligini isbotlaymiz. Buning uchun M da $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema olamiz va

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n \quad c_n = (f, \Phi_n)$$

deymiz. Bissel tengsizligiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $h \in M$ endi $h^1 = f - h$ deb

olamiz. ko'rinib turibdiki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$(h^1, \Phi_n) = (f, \Phi_n) - (h, \Phi_n) = c_n - c_n = 0$$

ixtiyoriy $\xi \in M$ element uchun

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n \quad \text{va} \quad (h^1, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h^1, \Phi_n) = 0 \quad \text{ya'ni} \quad h^1 \in M^\perp$$

Endi quyidagini yoyilmaning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik boshqa bir

$$f = h_1 + h_1^1 \quad h_1 \in M \quad h_1^1 \in M^\perp$$

Mavjud bo'lsin. u holda ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$(h^1, \Phi_n) = (f, \Phi_n) = c_n$$

Bu yerdan kelib chiqadiki $h_1 = h, h_1^1 = h^1$

Natija. $M \subset H$ qism fazoning orthogonal to'ldiruvchisining orthogonal to'ldiruvchisi M ning o'ziga teng ya'ni

$$(M^\perp)^\perp = M$$

Shunday qilib, H fazoning o'zaro to'ldiruvchisi qism fazolari haqida fikr yuritish mumkin. Agar M va M^1 ikkita shunday bir-birini to'ldiruvchi qism fazolar va $\{\Phi_n\} \quad \{\Phi_n^1\}$

- mos ravishda M va M^1 dagi to'la ortonormal sistema bo'lsa u holda $\{\Phi_n\}$ $\{\Phi_n^1\}$ sistemaning birlashmasi butun H fazoda to'la ortonormal sistema bo'ladi.

Natija. H fazodagi har qanday ortonormal sistemani to'ldirish mumkin.

Agar $\{\Phi_n\}$ sistema chekli bo'lsa, u holda bu sistemaga kiruvchi elementlar soni $\{\Phi_n\}$ sistemadan hosil qilingan M qism fazoning o'lchamiga va M^1 qism fazoning o'lchamiga teng. Shunday qilib quyidagiga egamiz.

Natija. n o'lchamli qism fazoning orthogonal to'ldiruvchisi n o'lchamga ega va aksincha

4-ta'rif. Agar H Hilbert fazosining ixtiyoriy $f \in H$ elementi

$$f = h_1 + h_2 \quad h_1 \in M_1 \quad h_2 \in M_2$$

Ko'rinishida tasvirlansa u holda H fazo o'zaro orthogonal M_1 va M_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi va

$$H = M_1 \oplus M_2 \text{ ko'rinishda yoziladi.}$$

To'g'ri yig'indini chekli yoki sanoqli sondagi qism fazolar uchun ham umumlashtirish mumkin. Agar shartlar bajarilsa H o'zining $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi:

- M_i qism fazolar juft-jufti bilan o'zaro orthogonal ya'ni M_i dagi ixtiyoriy vector M_k dagi barcha vektorlarga orthogonal, $i \neq k$
- Ixtiyoriy $f \in H$ element $f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots$ $h_n \in M_n$ ko'rinishda tasvirlanadi agar qo'shiluvchilar soni chekli bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holatda $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko'rinishda yoziladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki, agar f uchun yoyilma mavjud bo'lsa u yagona va quyidagi tenglik o'rinli :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$$

Qism fazolarning to'g'ri yig'indisi bilan bir qatorda chekli yoki sanoqli sondagi Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi haqida ham gapirish mumkin. Agar H_1 va H_2 lar ixtiyoriy Hilbert fazolari bo'lsa u holda ularning to'g'ri yig'indisi $H = H_1 \oplus H_2$ quyidagicha aniqlanadi. H fazoning elementlari barcha (h_1, h_2) $h_1 \in H_1$ $h_2 \in H_2$ juftliklardan iborat. $H = H_1 \oplus H_2$ fazoda qo'shish, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$(h_1, h_2) + (h_1^1, h_2^1) = (h_1 + h_1^1, h_2 + h_2^1) \quad h_1^1, h_1 \in H_1 \quad h_2, h_2^1 \in H_2$$

$$\alpha(h_1, h_2) = (\alpha h_1, \alpha h_2) \quad h_1^1, h_1 \in H_1 \quad h_2, h_2^1 \in H$$

$$((h_1, h_2), (h_1^1, h_2^1)) = (h_1, h_1^1)_{H_1} + (h_2, h_2^1)_{H_2} \quad h_1^1, h_1 \in H_1 \quad h_2, h_2^1 \in H$$

Chekli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n$ Hilbert fazosining to'g'ri yig'indisi ham xuddi shunday aniqlanadi.

Chekli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n$ Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$$

quyidagicha aniqlanadi

$$H = \left\{ (h = h_1, h_2, \dots, h_n, \dots) \mid h_n \in H_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty \right\}$$

H fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$(h, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g_n) \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \quad g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Sarimsoqov T.A “Funksional analiz kursi” Toshkent “O'qituvchi ” 1986-yil
2. Saymon M, Rid B ” методы современной математические физики” Том 1 функционал анализ. Moskva Izd.Mir 1977
3. Saymon M, Rid B ” методы современной математические физики” Том 4 функционал анализ. Moskva Izd.Mir 1982
4. Kolmogorov C.N Fomin C.B “elementi teorei I funktsionalnogo anaiza” moskva Izd Nauka 1989
5. Trenogin Z.A “funktsionalnoy analiz’ moskva Izd Nauka 1980

6. Gorodetskiy V.V i dr. “metodi resheniye zadach po funktsionalnomu analizu” 1990.