

EVKLID FAZOLARINING XARAKTERISTIK XOSSALARINI O'RGANISH.

Saidov Asqar Hayitnazarovich

Buxoro davlat texnika universiteti akademik litseyi

Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada Evklid fazosining xarakteristik xossalari haqida tushunchalar, ta'rif, teoremlar keltirilgan bo'lib, uning matematika fanidagi ahamiyati yoritib berilgan.

Kalit so'zlar. Evklid fazosi, to'la Evklid fazosi.

Annotation. The article on the characteristics of Euclidean space in Uch contains concepts, definitions, and theorems, highlighting its importance in mathematics.

Keywords. Euclidean space, complete Euclidean space.

Avvalo Evklid fazosi haqida qisqacha tushuncha beraylik. Chiziqli fazolardan norma kiritishning sinalgan usullaridan biri unda skalyar ko'paytma kiritishdir.

1-ta'rif. Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi va x, y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x, y) orqali belgilanadi.

2-ta'rif. Bizda haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan P funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa, unda skalyar ko'paytma deyiladi:

- 1) $p(x, y) \geq 0 \quad \forall x \in L \quad p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $p(x, y) = p(y, x) \quad x, y \in L$
- 3) $p(\alpha x, y) = \alpha \cdot p(x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in L$
- 4) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in L$

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formula orqali aniqlanadi, bu funksional norma aksiomalarni qanoatlantiradi. Skalyar ko'paytmaning 1-4 shartlarining shartlaridan normaning 1-2 shartlari bevosita kelib

chiqadi. Uchburchak aksiomasinng bajarilishi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

tengsizligidan kelib chiqadi.

Endi bu tengsizlikni ya`ni, Koshi- Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz.  $\lambda \in R$  ning barcha qiymatlarida nomanfiy bo`lgan kvadrat uchhadni qaraymiz:

$$\Phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2$$

bu kvadrat uchhadning diskriminanti musbat emas ya`ni,

$$D = 4[(x, y)]^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

bundan

$$[(x, y)]^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad \text{ya`ni} \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Endi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ norma uchun uchburchak aksiomasining bajarilishini ko`rsatamiz;

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

bundan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ tengsizlik kelib chiqadi.

Shuni ta`kidlaymizki, Evklid fazosida yig`indi, songa ko`paytirish va skalyar ko`paytma amallari uzluksizdir, ya`ni agar  $x_n \rightarrow x$   $y_n \rightarrow y$  (norma bo`yicha yaqinlashish ma`nosida)  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  (sonli ketma-ketlik sifatida) bo`lsa u holda

$$x_n + y_n \rightarrow x + y \quad \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x \quad (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$$

Bu tasdiqlarning isboti quyidagicha :

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Evklid fazolarida nafaqat vektorning normasining (ya`ni uzunligining), balki vektorlar orasidagi burchak tushunchasini ham kiritish mumkin. Noldan farqli x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

formula bilan aniqlanadi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra uning o'ng tomoni moduli bo'yicha birdan oshmaydi va demak, formula haqiqatdan ham nolmas x va y vektorlar orasidagi φ $0 \leq \varphi \leq \pi$ burchakni bir qiymatli aniqlaydi.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ bo'lsa u holda nolmas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo'lsa $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.

Agar $\{x_\alpha\}$ vektorlar orthogonal sistemani tashkil qilsa u holda $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Haqiqatdan ham $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ bo'lsin. bu tenglikning ikkala qismini x_i ga skalyar ko'paytirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_i (x_i, x_i) = 0$$

$(x_i, x_i) \neq 0$ bo'lgani uchun barcha $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ larda $\alpha_i = 0$ bo'ladi.

4-ta'rif. Agar $\{x_\alpha\}$ sistemaning o'zida saqllovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o'ziga teng bo'lsa u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to'la deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa u holda bu sistema E fazodagi ortonormal (orthogonal normalangan) bazis deyiladi.

Ravshanki, agar $\{x_\alpha\}$ ortogonal sistema bo'lsa u holda

$$\{\|x_\alpha\|^{-1} \cdot x_\alpha\}$$

Ortonormal sistema bo'ladi.

6-ta'rif. Agar E Evklid fazosining hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud bo'lsa E separabel Evklid fazosi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan R^n , l_2 , $C_2[a, b]$ va $L_2[a, b]$ fazolar separabel evklid fazolarga misol bo'ladi. Har qanday separabel evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema ko'pi bilan sanoqlidir.

1-teorema (Ortogonallash jarayoni) Bizda E evklid fazosida chiziqli bo'lmagan

$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ elementlar sistemasi berilgan bo'lsin, u holda E evklid fazosida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi :

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$$

sistema mavjud:

1) $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ ortonormal sistema

2) har bir Φ_n element $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ya'ni,

$$\Phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n \quad a_{nn} > 0$$

3) har bir f_n element $F_n = b_{n1}\Phi_1 + b_{n2}\Phi_2 + \dots + b_{nn}\Phi_n \quad b_{nn} > 0$ ko'rinishida tasvirlanadi.

4) $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ sistemaning har bir elementi 1-3 shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. Φ_1 element $a_{11}f_1$ ko'rinishda izlanadi va a_{11}

$(\Phi_1, \Phi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1$ shartdan aniqlanadi. Bu yerdan

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} = \frac{1}{\|f_1\|} > 0$$

Ko'rinib turibdiki, Φ_1 bir qiymatli aniqlanadi. Faraz qilaylik, 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi Φ_k elementlar qurilgan bo'lsin.

Ushbu

$$\psi_n = f_n - (f_n, \Phi_1) \cdot \Phi_1 - (f_n, \Phi_2) \cdot \Phi_2 - \dots - (f_n, \Phi_{n-1}) \cdot \Phi_{n-1}$$

elementlarni kiritamiz. Ko'rinib turibdiki, agar $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ bo'lsa, $(\psi_n, \Phi_k) = 0$ bo'ladi. $(\psi_n, \psi_n) = 0$ tenglik $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ sistemaning chiziqli erkli ekanligiga zid

shuning uchun $(\psi_n, \psi_n) > 0$. Endi $\Phi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}}$ deymiz. ψ_n vektorning

qurilishiga ko'ra u $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ vektorning chiziqli kombinatsiyasi va demak, Φ_n ham ularning chiziqli kombinatsiyalari ya'ni

$$\Phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n$$

bu yerda

$$a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}} > 0$$

bundan tashqari $(\Phi_n, \Phi_k) = 0$ $(\Phi_n, \Phi_n) = 1$ ($k < n$) va $\Phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n$

$$b_{bb} = a_{nn}^{-1} = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)} > 0$$

ya'ni, Φ_n teorema shartlarini qanoatlantiradi. $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ sistemadan 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ va sistemaga o'tish ortogonallashtirish jarayoni deyiladi. Ko'rinib turibdiki, $f_1, f_2, \dots, f_n$ va $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ sistemadan hosil bo'lgan qism fazolari ustma-ust tushadi. Bundan kelib chiqadiki, bu sistemalar bir vaqtda to'la yoki to'la emas.

Natija. har qanday separabel evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud. Isbot. Φ_n -E evklid fazosining hamma yerida zich sanoqli to'plam bo'lsin. undan chiziqli bo'lmagan elementlarni chiqarib tashlab, qolgan $\{f_n\}$ sistemaga ortogonallashtirish jarayonini qo'llab ortonormal bazisni hosil qilamiz.

To'la evklid fazolari.

Riss –Fisher teoremasi.

Bizni asosan to'la evklid fazolari qiziqtiradi.

Ta'rif. E evklid fazosi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa u to'la evklid fazosi deyiladi.

Teorema. (Riss –Fisher teoremasi.)

$\{\Phi_n\}$ -E to'la evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema va $c_1, c_2, \dots, c_n$ sonlar shunday bo'lsinki $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ qator yaqinlashsin .

U holda shunday $f \in E$ element mavjudki

$$c_k = (f, \Phi_k) \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2 \quad \text{tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

Isbot. E to'la evklid fazosida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n = \sum c_k \Phi_k$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday

$n(\varepsilon) > 0$ mavjudki barcha $n > n(\varepsilon)$ $p \in N$ larda

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\Phi_{n+1} + \dots + c_{n+p}\Phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 < \varepsilon^2$$

Tengsizlik o`rinli bo`ladi ya`ni,  $\{f_n\}$  fundamental ketma-ketlik E ning to`laligiga ko`ra $\{f_n\}$ ketma-ketlik biror $f \in E$ elementga yaqinlashadi. Istalgan $i \in N$ uchun

$(f, \Phi_i) = (f_n, \Phi_i) - (f - f_n, \Phi_i)$ tenglik o`rinli, bu tenglikning o`ng tomonidagi birinchi qo`shiluvchi  $n \geq i$  da  $c_i$  ga teng ikkinchi qo`shiluvchi esa $n \rightarrow \infty$ nolga intiladi, chunki $(f - f_n, \Phi_i) \leq \|f - f_n\| \cdot \|\Phi_i\| = \|f - f_n\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

Bu tenglikning chap tomoni n gab bog`liq emas, shuning uchun  $n \rightarrow \infty$  da limitga o`tsak

$(f, \Phi_i) = c_i$ aniqlanishiga ko`ra f

$$\|f - f_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ uchun}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

2-teorema. To`la separabel evklid fazosidagi  $\{\Phi_n\}$  ortonormal sistema to`la bo`lishi uchun E da  $\{\Phi_n\}$  sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo`lgan nolmas elementning mavjud bo`lmasligi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriylik. Faraz qilaylik $\{\Phi_n\}$ to`la sistema bo`lsin u holda teorema shartiga ko`ra u yopiq ham bo`ladi. Agar f element $\{\Phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga orthogonal bo`lsa u holda uning barcha Fure koeffitsiyentlari nolga teng ya`ni $c_n=0$ bo`ladi. U holda Parseval tengligiga ko`ra

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

ya`ni $f = 0$

Yetarliligi. Teskarisini faraz qilaylik, $\{\Phi_n\}$ to`la bo`lmagan sistema bo`lsin ya`ni E da shunday $g \neq 0$ element mavjudki

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \quad \text{bu yerda } c_k = (g, \Phi_k) \text{ tenglik bajarilsin. Riss-Fisher}$$

teoremasiga asosan shunday $f \in E$ element mavjudki

$$(f, \Phi_k) = c_k \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Bu holda $f-g$ element barcha $\{\Phi_n\}$ larga orthogonal bo`ladi.

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g) \text{ tengsizlikdan } f-g \neq 0 \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

Evklid fazolarining xarakteristik xossalarini o`rganishda quyidagicha savolni qaraymiz.  $R$ -normalangan fazo bo`lsin, R da aniqlangan fazo norma qanday qo`shimcha shartlarni qanoatlantirsa,  $R$  Evklid fazosi ham bo`ladi?

Boshqacha aytganda, qanday shartlarga norma orqali unga mos skalyar ko`paytma kiritish mumkin.

3-teorema. R normalangan fazo evklid fazosi bo`lshi uchun ixtiyoriy ikkita $f, g \in R$ elementlar uchun

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. $f+g$ va $f-g$ tomonlari f va g vektorlardan iborat parallelogram diagonallaridir. Ko`rib o`tgan tenglik evklid fazosidagi parallelogramning ma`lum xossalarini ifodalaydi, ya`ni parallelogram diagonallari kvadratlarining yig`indisi barcha tomonlarining kvadratlarining yig`indisiga teng:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = (f + g, f + g) + (f - g, f - g) = 2 \cdot (f, f) + 2 \cdot (g, g) = 2 \cdot \|f\|^2 + 2 \cdot \|g\|^2$$

Yetarliligi. R normalangan fazoda normaning

$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2 \cdot \|f\|^2 + 2 \cdot \|g\|^2$ ayniyatdan foydalanib, R da skalyar ko`paytma kiritish mumkinligini ko`rsatish kifoya.

Ixtiyoriy $f, g \in R$ elementlar uchun

$$(f, g) = \frac{1}{4} \cdot (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) \text{ deymiz.}$$

Ko`rsatish mumkinki agar bu tenglik bajarilsa bu tenglik yordamida aniqlangan funksional skalyar ko`paytma shartlarini qanoatlantiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Sarimsoqov T.A “Funksional analiz kursi” Toshkent “O`qituvchi ” 1986-yil
2. Saymon M, Rid B ” методы современной математические физики”
Том 1 funksional analiz. Moskva Izd.Mir 1977
3. Saymon M, Rid B ” методы современной математические физики”
Том 4 funksional analiz. Moskva Izd.Mir 1982
4. Kolmogorov C.N Fomin C.B “ elementi teorei I funksionalnogo anaiza”
moskva Izd Nauka 1989
5. Trenogin Z.A “funktionalnoy analiz’ moskva Izd Nauka 1980
6. Gorodetskiy V.V i dr. “metodi resheniye zadach po funktsionalnomu
analizu” 1990.