

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING AHAMIYATINI O'RGANISH.

Saidov Asqar Hayitnazarovich

Buxoro davlat texnika universiteti akademik litseyi

Matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial tenglamalar va ularning fan va texnikadagi ahamiyati haqida qisqacha bayon qilingan.

Kalit so'zlar. Differensial tenglama, elliptik, giperbolik, parabolik tipdagi tenglamalar, korrekt qo'yilgan va korrekt qo'yilmagan masalalar.

Annotation. This article briefly describes differential equations and their importance in science and technology.

Keywords. Differential equations, elliptic, hyperbolic, parabolic equations, well-posed and ill-posed problems.

Aralash tipdagi differensial tenglamalar o'zining mexanika fizika biologiya texnikaning turli sohalariga amaliy tadbirlari orqali differensial tenglamalar sohasining muhim sohasiga aylandi.

Ayniqsa Frankl Lavrektyev-Bitsadze tenglamasi uchun Triкоми masalasining gaz dinamikasiga tadbirlarini topgandan keyin bu sohaga qiziqish kuchaydi.

Hozirgi zamon texnikasining tez rivojlanishi tabiiy fanlar oldiga yangi vazifalar qo'ya boshladi. Ayniqsa matematikaga shu jumladan differensial tenglamalarga texnik masalalarni yechish uchun yangi-yangi chegaraviy masalalarni yechish usullarini takomillashtirish va uning amaliy tadbirlarini ta'minlash kabi talablar qo'ydi.

Differensial tenglamalarga keltiriladigan fizik mexanik texnik masalalardan tashqari ekologiya biologiya meditsina kimyo va boshqa fanlarning ham amaliy masalalarini differensial tenglamalarga keltirish va ular uchun korrekt chegaraviy masalalar o'rganish zaruriyati dolzarb bo'lib qoldi.

Ayniqsa, yuqoridagi aytilgan masalalarni yechishda matematik-fizika tenglamalari fanining yangi sohasi aralash tipdagi tenglamalarni o`rganish Respublikamizda yetakchi rahbar matematiklarimiz rahbarligida yuqori darajaga rivoj topgan matematik-fizika tenglamalari darsliklaridan ma`lumki xususiy hosilali tenglamalar tiplarga bo`lib o`rganiladi. Ular elliptic , giperbolik, parabolic tipdagi tenglamalardir.

F.I.Frankl Lavrentyev-Bitsadze tenglamasining gaz dinamikasiga tadbiqlarini o`rganadiva aniqlaydi. Keyinchalik esa aralash tipdagi tenglamalarning texnikaning keng sohalariga tadbiqlari topildi. Shu sababli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o`rganishga qiziqish kuchaydi.

Bu maqolada chegarada buziladigan giperbolik tenglamalar uchun ayrim chegaraviy masalalarni o`rganamiz.

Tekislikda

$$A(x,y)U_{xx}+2B(x,y)U_{xy}+C(x,y)U_{yy}+D(x,y)U_x+E(x,y)U_y+F(x,y)U=0 \quad (1)$$

tenglama biror $D \subset R^2$ sohada berilgan bo`lsin. Koeffitsiyentlari  $A,B,C,D,E,F$  lar  $x,y$  larning haqiqiy funksiyalari bo`lib, D sohada bir vaqtda nolga teng emas. D sohada (1) tenglama $B^2-AC<0$ bo`lsa *elliptik*,  $B^2-AC>0$  bo`lsa, *giperbolik*, $B^2-AC=0$ bo`lsa, *parabolik* tipga tegishli bo`ladi. Biroq, bu uchta tip bilan umumiy holda tekislikda ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning barchasini tiplarga bo`linishi tugamaydi chunki,  $B^2-AC$  ifoda  $D$  sohada o`z ishorasini saqlamasligi mumkin. Agar B^2-AC D sohada o`z ishorasini o`zgartirsa, (1) tenglama D sohada *aralash* tipdagi tenglama deyiladi.

D sohani j -chiziq D_1 va D_2 sohalarga bo`lib (1) tenglama  $D_1$  sohada elliptic,  $D_2$  sohada parabolik tipga tegishli bo`lsa, j -chiziqqa tipning buzilish chizig`i ham deyiladi. Ma`lumki,

$$Ddy^2-2Bdydx+CDx^2=0 \quad (2)$$

oddiy differensial tenglama tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi va tenglamani quyidagi ko`rinishda ham yozish mumkin.

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0 \quad \text{bu yerdan}$$

$$\begin{cases} y'_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \\ y'_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \end{cases} \quad (3)$$

(3) sistema yechimlarini

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi(x, y) = \text{const} \\ y_2 &= \eta(x, y) = \text{const} \end{aligned} \quad (4)$$

Chiziqlar (4) tenglamaning xarakteristikalari deyiladi.

Bu yerdan (1) tenglama elliptik bo`lganda, xarakteristikalari parabolik bo`lganda, haqiqiy giperbolik bo`lganda ham xarakteristikalar haqiqiy bo`lishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tartibli ikki o`zgaruvchili xususiy hosilali aralash tipdagi tenglamalarni quyidagi kanonik tenglamalardan birortasiga keltirish mumkin.

$$y^n U_{xx} + U_{yy} + a_1(x, y)U_x + b_1(x, y)U_y + c_1(x, y)U = f_1(x, y) \quad (5)$$

$$U_{xx} + y^n U_{yy} + a_2(x, y)U_x + b_2(x, y)U_y + c_2(x, y)U = f_2(x, y) \quad (6)$$

Odatda, yuqoridagi tenglamalar mos ravishda birinchi va ikkinchi tur aralash tipdagi tenglamalar deyiladi.

Chegarada buzilmaydigan tenglamalar uchun korrekt qo`yilgan chegaraviy masalalar chegarada buziladigan tenglamalar uchun, umuman aytganda, korrekt qo`yilgan chegaraviy masalalar bo`lmasdan qoldi.

Bu faqat birinchi marta M.B.Keldish tomonidan $y=0$ da buziladigan elliptic tipdagi

$$y^m U_{yy} + U_{xx} + aU_y + bU_x + cU = 0 \quad (7)$$

tenglama uchun birinchi chegaraviy masalaning korrekt qo'yilishiga m va $a(x,0)$ -lar ta'sir qilishi va $y=0$ buzilish chizig'i ayrim hollarda chegaraviy shartlardan ozod qilinishi aytilgan.

Keyinchalik, shunga o'xshash faktlar $y=0$ chizig'ida buziladigan ayrim giperbolik tenglamalar uchun ham o'rinli bo'lishi isbotlangan.

Matematik-fizika tenglamalari o'rganadigan elliptik tipdagi tenglamalar uchun Direxle, Neyman masalalari, giperbolik tipdagi masalalar uchun Koshi, Darbu, Gursa, Koshi-Gursa masalalari, parabolik tipdagi tenglamalar uchun birinchi, ikkinchi chegaraviy masalalar aralash tipdagi tenglamalar uchun ham o'rganiladi.

Biz asosan tekislikda quyidagi giperbolik tipdagi buziladigan birinchi tur

$$U_{yy}-yU_{xx}+a(x,y)U_x+b(x,y)U_y+c(x,y)U=f(x,y) \quad y>0$$

tenglama uchun chegaraviy masalani o'rganamiz.

Darsliklardan ma'lumki buziladigan giperbolik tenglamalar uchun ko'riladigan klassik masalalarni yechishda Riman funksiyasi usuli muhim rol o'ynaydi. Biroq, giperbolik tipdagi buziladigan xususiy hosilali tenglamalar uchun Riman funksiya to'liq o'rganilmagan.

Ushbu maqolada giperbolik tipdagi ikkinchi tur buziladigan tenglama uchun Riman funksiyasi mavjudligi va ayrim hollarda Riman funksiyasining analitik (formulasini) ifodasini topilgan.

Matematik-fizika tenglamalari fani boshqa fanlardan o'zining turli amaliy masalalarini yechishda muhimligi bilan ajralib turadi. Ayniqsa, aralash tipdagi tenglamalar uchun korrekt qo'yilgan va yechilgan chegaraviy masalalar texnikada muhim tadbiqlarga ega.

Ayniqsa, M.A Lavrentyev, I.N.Vekya, S.A.Xristianovich F.I Franklin va boshqalarning ishlarida gazlar dinamikasida gidrodinamik oqimlarda (tovush tezligidan Alfen tezligiga o'tishda) ishlatilishi ko'rsatildi.

Masalan, F.I.Frankl tomonidan yassi devorli idishdan (idish ichidagi tezlik tovush tezligidan kichik) tovush tezligidan katta (yuqori) tezlikda otilib chiquvchi oqim to'g'risidagi masala

$$K(y)U_{xx}+U_{yy}=0 \quad K(0)=0 \quad K'(y)>0$$

Chaplogin tenglamasi uchun Triкоми masalasiga kelishni ko'rsatdi.

Aralash tipdagi tenglamalar samolyotsozlik, raketsozlikda ham keng qo'llanilyapti. Turli amaliy masalalarni yechishda aralash tipdagi tenglamalar ahamiyatini tobora oshib borayotganligini hamda bu yo'nalishning Respublikamizda yuqori darajada rivoj topganini ta'kidlash o'rinli bo'ladi.

F.I.Frankl yassi devorli idishdan (idish ichidagi tezlik tovush tezligidan kichik) tovush tezligidan katta (yuqori) tezlikda otilib chiquvchi oqim to'g'risidagi masalani Chaplogin tenglamasi uchun o'rinli bo'lgan

$$K(y)U_{xx}+U_{yy}=0 \quad K(0)=0 \quad K'(y)>0$$

tenglama uchun Triкоми masalasiga kelishini ko'rsatdi.

Shundan keyin aralash tipdagi differensial tenglama uchun korrekt chegaraviy masalalar qo'yish va ularni o'rganishga yana qiziqish kuchaydi.

Giperbolik tipdagi buziladigan birinchi tur tenglama uchun topilgan Riman funksiyasi chegaraviy masalalar yechishga tadbiiq qilinadi. Yechilgan chegaraviy masalalar texnikaga tadbiiq qilinadi.

Chegarada buziladigan bir giperbolik tipdagi tenglama uchun xarakteristik masala. Korrekt qo'yilgan va korrekt qo'yilmagan masalalar.

Yuqorida aytilganidek aralash tipdagi tenglama uchun birinchi marta Italiyalik matematik Francheska Trikami

$$y U_{xx} + U_{yy} = 0$$

tenglama uchun qo'ygan va tekshirgan. Keyinchalik bu masalaning turli amaliy tadbiiqlari F. I. Frankl va boshqa olimlar tomonidan topilgan va aralash turdagi

tenglamalarni o'rganishga qiziqish kuchaygan. Hozirgi vaqtda, aralash tipdagi tenglamalar xususiy hosilali tenglamalar nazariyasining tez rivojlanib borayotgan katta bir qismini tashkil qiladi.

Ta'kidlaymizki, bu yo'nalishning respublikamizda ham yuqori rivoj topgandir.

Matematik fizika tenglamalari darsliklari va qo'llanmalaridan ma'lumki, matematik fizika masalalarining qo'yishda boshlang'ich, chegaraviy shartlarni ifodalovchi funksiyalar berilgan bo'ladi. Tabiiyki, masalalarning yechimi shu funksiyalarga bog'liq bo'ladi.

Odatda, bu funksiyalar tajriba asosida aniqlanadi va shu uchun ular absolyut aniq emas. Albatta yo'l qo'yilgan xatolik o'z navbatida masala yechimiga ta'sir ko'rsatadi. Boshlang'ich va chegaraviy shartlarni tekshirishda yechimning mavjudligi va yagonaligidan tashqari, boshlang'ich va chegaraviy shartlarda qo'yilgan xatolikning yechimga qanday ta'sir qilishini aniqlash muhim ahamiyatga ega.

Bu fikrni oydinlashtirish uchun tekshirilayotgan masalani M orqali belgilaylik. U holda M masala mohiyati berilgan $\varphi \in E\varphi$ funksiyalarga asosan uning $U \in Eu$ yechimni topishdan iboratdir. Bu yerda Eu va $E\varphi$ metrikalari Pu va $P\varphi$ bo'lgan qandaydir metrik fazolardir. Bu fazolar masalaning qo'yilishi bilan aniqlanadi. M masalaning yechimi tushunchasi aniqlangan bo'lib, har bir $\varphi \in E\varphi$ elementga yagona

$$U = R(\varphi) \in Eu$$

yechim mos kelsin.

Agar ixtiyoriy $\xi > 0$ uchun shunday $\delta(\xi) > 0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lib,

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) \leq \delta(\xi)$$

tengsizlikdan

$$\rho(u_1, u_2) \leq \xi$$

tengsizlik kelib chiqsa, M masala $(Eu, E\varphi)$ fazolar juftida *turg'un* deyiladi.

$$U_i = R(\varphi_i), \quad U_i \in Eu, \quad \varphi_i \in E\varphi, \quad i = 1, 2, \dots$$

masalaning yechimi berilgan shartlar (boshlang'ich, chegaraviy shartlar, tenglamaning koeffitsiyentlari, ozod hadi va hokazo) ga uzluksiz bog'liq bo'ladi.

Agar tekshirilayotgan M masala uchun,

1. Ixtiyoriy $\varphi \in E\varphi$ uchun $U \in Eu$ yechim mavjud.

2. U yechim yagona.

3. Masala $(Eu, E\varphi)$ fazolar juftligida *turg'un* shartlar bajarilsa, M masala

$(Eu, E\varphi)$ fazolar juftligida *korrekt* (to'g'ri) qo'yilgan yoki to'g'ridan to'g'ri masala deyiladi.

Aks holda, masala *korrekt* qo'yilmagan masala deyiladi, ya'ni bu holda yuqoridagi talablardan kamida bittasi bajarilmaydi. Shuni aytish kerakki, *korrekt* qo'yilmagan masala ta'rifi berilgan $(Eu, E\varphi)$ juftlikka tegishlidir, chunki boshqa metrikalarda shu masalaning o'zi *korrekt* qo'yilgan bo'lishi ham mumkin.

Masalan, Koshi - Kovalevskaya teoremasi uning umumiylik tavsifiga ega ekanligiga qaramasdan differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun Koshi masalasining *korrektiligini* to'la hal etmaydi.

Haqiqatdan ham bu teorema masala yechimining yetarli kichik sohada mavjud va yagonaligini ta'min etadi. Odatda, Koshi masalasi umuman, kichik bo'lmagan sohalarda ham qo'yiladi. Bundan tashqari, tenglamalarning ozod hadi va boshlang'ich shartlari umuman olganda, analitik bo'lmagan funksiyalar bo'ladi. Ulardan tashqari yechim boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmasligi ham mumkin. Bu tasdiqni ko'rsatuvchi misol birinchi marta Adamar tomonidan tuzilgan.

1. Adamar misoli. Ushbu

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \tag{8}$$

Laplas tenglamasining $y > 0$ yechim tekislikda

$$U(x,0)=0, \quad U_y(x,0)=e^{-\sqrt{k}} \cos kx \quad (9)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechim topilsin.

Bevosita hisoblash bilan ko'rish qiyin emaski bu masalaning yechimi

$$U(x,y)=1/k * e^{-\sqrt{k}} \cos kx * shky, \quad k=1,2,\dots$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ko'rish qiyin emaski, $k \rightarrow +\infty$ da $e^{-\sqrt{k}} \cos kx$ funksiya 0 ga tekis intiladi, ya'ni

$$e^{-\sqrt{k}} \cos kx = 0$$

Biroq, $U(x,y)$ yechim 0 dan farqli ixtiyoriy y da, $k \rightarrow +\infty$ da

$$U(x,y)=1/k * e^{-\sqrt{k}} \cos kx * shky \rightarrow 0$$

bo'ladi. Shunday qilib, Laplas tenglamasi Koshi masalasi korrekt qo'yilgan ekan.

2. Ushbu

$$U_t = U_{xx} \quad (10)$$

issiqliq o'tkazuvchanlik tenglamasining $t < 0$, $0 \leq x \leq \pi$ sohada

$$U(x,0)=e^{-\sqrt{k}} \sin kx, \quad U(0,t)=U(\pi,t)=0 \quad (11)$$

bu yerda k shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. Bu masalaning yechimi

$$U(x,t)=e^{-\sqrt{k}} e^{-k^2 t} \sin kx, \quad k=1,2,\dots \quad (12)$$

funksiya ekanligini tekshirish qiyin emas.

Tabiiyki, har bir k uchun o'zining boshlang'ich sharti va unga mos yechimi bor.

Shu sababli (11) yechimni yechimlar ketma - ketligi deb qarash kerak.

$e^{-\sqrt{k}} \sin kx$ funksiya $k \rightarrow +\infty$ da 0 ga intiladi, lekin yechim xuddi Adamar

misolidek hech qanday limitga intilmaydi. Bundan, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Direxle masalasi korrekt qo'yilmagan masala ekanligi kelib chiqadi.

Buzilmaydigan tenglamalar uchun quyidagi chegaraviy masalalar umuman aytganda, buziladigan tenglamalar uchun korrekt qo'yilmagan bo'ladi.

Quyidagi

$$y^m U_{yy} + U_{xx} + aU_y + bU_x + cU = 0 \quad (13)$$

$y=0$ da buziladigan elliptik tipdagi tenglama uchun birinchi chegaraviy masala korrekt qo'yilmagan masala ekanligini birinchi marta M. B. Keldish payqagan. (13) tenglama uchun chegaralangan funksiyalar sinfida masalaning korrekt qo'yilishi tenglamadagi m , $d(x,0)$ - larga bog'liq ekanligini ko'rsatgan.

Keyinchalik shunga o'xshash fakt ayrim buziladigan giperbolik tenglamalar sinfi uchun ham o'rinli ekanligi ko'rsatilgan.

Aralash masala, asosan, giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalarga qo'yiladi. G sohada R^n fazo bilan ustma - ust tushmaydi. $G \neq R^n$ bunda boshlang'ich va chegaraviy shartlar birgalikda qo'yilgan bo'ladi.

Giperbolik va parabolik tiplarga asosan Koshi masalasi qo'yiladi. $G = R^n$ G soha R^n soha bilan ustma - ust tushadi. Bu holda chegaraviy shartlar bo'lmaydi.

Chegaraviy shartlar asosan elliptik tipdagi tenglamalarga qo'yiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Salohiddinov M.S ,O'rinov A.Q “ giperbolik va elliptic tipdagi buziladigan differensial tenglamalar ”. toshkent “Universitet” 2006
2. Salohiddinov M.S “ Matematik fizika tenglamalari”. Toshkent “O'zbekiston” 2002y.
3. Salohiddinov M.S , Ismoilov B.I “Уравнения смешонного типа с двумя линиями вырождения ”. Toshkent “ Mumtoz so`z” 2009y
4. Smirkov M.M “Уравнения смешонного типа” moskva 1970y

5. То`yliyev A “ О задаче Дарбу для одной вырождающихся гиперболической системы” O`zSSR 1985y