

ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ТИПА ФЛОРИНА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Тураев Р. Н.

Термезский государственный университет.

rasul.turaev@mail.ru

Раимов А. Л.

Термезский государственный университет.

abdullaraimov90@gmail.com

Аннотация

В данной работе рассматривается постановка задачи со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с нелокальным условием. Данная задача применяется для моделирования процессов диффузии в биологии, химии, экологии и биомедицине. В исследовании представлена постановка задачи с учетом движения свободной границы, коэффициента диффузии и конвекции.

Ключевые слова: свободная граница, квазилинейное параболическое уравнение, нелинейное граничное условие, конвекция, диффузия.

Annotatsiya

Ushbu ishda kvazichiziqli parabolik tenglama uchun Florin tipidagi erkin chegarali masala va uning noaniq chegaraviy sharti o'rganiladi. Masala biologiya, kimyo, ekologiya va biotibbiyot sohalaridagi diffuziya jarayonlarini modellashtirishda qo'llaniladi. Tadqiqotda erkin chegara harakati, diffuziya koeffitsienti va konveksiya ta'siri hisobga olingan holda masalaning qo'yilishi taqdim etiladi.

Kalit so'zlar: erkin chegara, kvazichiziqli parabolik tenglama, nolokol chegaraviy shart, konveksiya, diffuziya.

Annotation

This paper presents the formulation of a Florin-type free boundary problem for a quasilinear parabolic equation with a nonlocal boundary condition. The problem is relevant to modeling diffusion processes in biology, chemistry, ecology, and biomedicine. The study provides the problem statement, considering the movement of the free boundary, diffusion coefficient, and convection effects.

Keywords: free boundary, quasilinear parabolic equation, nonlinear boundary condition, convection, diffusion.

В сегодняшней день современной науке явление переноса и подобные им процессы часто математически моделируются в терминах задач для квазилинейных уравнений параболического типа. К таким математическим моделям приводятся, например, многие актуальные проблемы биологии, химии, экологии и биомедицины.

Нелинейные задачи диффузии со свободными граничными условиями обычно используются для описания расширения и распространения биологических видов или химических веществ, а свободная граница используется для представления границы этого расширения [1].

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с нелокальным условием.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 \leq t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)$ – удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t, x)$ в области $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x, s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t, x) = a(t, x, u_x)u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0 \quad (2)$$

$$mu(t, 0) = u(x_0, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $s(t)$ – свободная (неизвестная) граница, которая определяется вместе с функциями $u(t, x)$. $a(t, x, u_x)$ – коэффициент диффузии.

Коэффициент диффузии $a(t, x, u_x)$ являющийся одной из наиболее важных величин, определяющих скорость диффузии, зависит от природы растворителя и растворенного вещества, от структурных факторов [2].

Изучаемая задача (1)-(5) изучена в случае $a(t, x, u_x) = 1$ [3].

Относительно данных задач в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. Функции $a(t, x, u_x)$ и $a'_{u_x}(t, x, u_x)$ определены и непрерывны для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(t, x, u_x) \geq a_0 > 0$;
2. Постоянные s_0 и α удовлетворяют неравенствам $s(0) = s_0 > 0$ и $0 < \alpha < 1$;
3. $\varphi(x)$ трижды, $\psi(t)$ один раз непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'''(x)$, $\psi'(t)$ – удовлетворяют условию Гельдера;
4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч. рассматриваемых вспомогательных задачах). В частности, $\varphi(0) = \alpha\varphi(x_0)$, $\varphi(s_0) = 0$, $\varphi'(s_0) = \psi(0)$.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $u(t, x)$. Далее, устанавливаются априорные оценки для решений $s(t)$, $u(t, x)$ и их старшие производные в норма Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени. Затем доказывается единственности решения первоначальной задачи, и доказывается глобальную разрешимость полученной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [4,5].

Список использованной литературы

1. Ren-Hu Wang a,b, Lei Wang a, Zhi-Cheng Wang. Free boundary problem of a reaction–diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467 (2018). 1233-1257.
2. Готтштайн Г. Физико-химические основы материаловедения. Пер. с англ. /- Москва: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2011. - 400 с.
3. Takhirov J.O., Turaev R.N. The free boundary problem without initial condition. Journal of Mathematical Sciences, (New York), Vol.187, No.1, (2012). pp. 86-100.
4. Turaev R.N. Nonlocal Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection. Bulletin of University of Karaganda. 2020. No 4. P.12-21.
5. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, с.736.