ISSN 2181-

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ПОГЛОЩЕНИЕМ ПРИ КРИТИЧЕСКОМ ПАРАМЕТРЕ.

Мукимов А.Ш.
(Университет Алфрагануса в Ташкенте,
mukimovaskar89@mail.ru)

Аннотация. В данной работе мы изучаем асимптотическое поведение (при $t \to \infty$) решений системы полулинейной задачи теплопроводности с поглощением при критическом параметре. Асимптотика была установлена с использованием метода эталонных уравнений. Доказательства проводились с помощью метода сравнения решений и принципа максимума. Для численных расчетов в качестве начального приближения мы использовали основанную на длительном времени асимптотику решения.

Ключевые слова: *задача теплопроводности, полулинейная система, критическое значение параметра, поглощение, принцип максимума, численное вычисление, визуализация.*

IKKI KOMPONENTALI NOCHIZIQLI MUHITLARDA YUTILISHGA EGA, KRITIK PARAMETRDA ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK MASALASINING YECHIM ASIMPTOTIKASI.

Annotatsiya. Bu ishda biz kritik parametr va yutilishga ega yarimchiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalar sistemasining $t \to \infty$ dagi yechim asimptotikasini ko‘rib chiqamiz. Yechim asimptotikasi etalon tenglamalar usuli yordamida o‘rnatilgan. Teoremalar isboti yechimlarni taqqoslash va maksimum prinsiplari orqali isbotlangan. Sonli hisoblashlarda boshlang‘ich yechim sifatida o‘rnatilgan asimptotikadan foydalanamiz.

Tayanch so‘zlar: *issiqlik o‘tkazuvchanligi masalasi, yarim chiziqli sistema, kritik parametr qiymati, yutilish, maksimum printsipi, sonli hisoblash, vizualizatsiya.*

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY IN TWO-COMPONENT NONLINEAR MEDIA WITH ABSORPTION AT A CRITICAL PARAMETER.

Abstract. In this paper we study the asymptotic behavior (for $t \to \infty$) of solutions of the system semi linear heat conduction problem with absorption at a critical parameter. The asymptotics were established using the method of standard equations. The proofs were carried out using the method of comparison of solutions and the maximum principle. For numerical computations as an initial approximation, we used founded the long time asymptotic of the solution.

Key words: *heat conduction problem, semi linear system, critical value of parameter, absorption, maximum principle, numerical computation, visualization.*

Введение

Изучение влияния параметров системы в процессе эволюции является актуальной задачей. Было доказано, что существуют некоторые значения параметров, при которых система уравнений имеет другое решение. Такие значения числовых параметров называются критическими или критическими значениями типа Fujita. Он впервые установил это для полулинейного уравнения теплопроводности [1]. При критических параметрах мы можем наблюдать новые эффекты, такие как бесконечная энергия, локализация и другие.

Как хорошо известно, для численного расчета нелинейной задачи важен выбор начального приближения, которое сохраняет свойства конечной скорости распространения, пространственной локализации, ограниченных и “blow-up” решений, что гарантирует сходимость с заданной точностью к решению задачи с минимальным числом итерации.

Была рассмотрена следующая система полулинейных уравнений теплопроводности в области $Q = \{(t,x) : t > 0, x \in R^N\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - v^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - u^{\beta_2}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \ge 0, \quad x \in [a,b], \\ v(0,x) = v_0(x) \ge 0, \quad x \in [a,b], \end{cases} \tag{2}$$

t и x – соответственно временная и пространственная координата, β_1, β_2 критические параметры, $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \partial^2 / \partial x_i^2$.

Значения критических параметров должны удовлетворять следующему выражению:

$$\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1 \beta_2 - 1} = \frac{N}{2},$$

где N-размер измерения.

Система (1)-(2) описывает разные физические процессы в двухкомпонентной нелинейной среде при наличии поглощения. Например, она описывает процессы реакции-диффузии, теплопроводности, горения, политропической фильтрации жидкости и газа. Функции u и v тогда можно трактовать , как температуры взаимодействующих друг с другом компонент некоторых процессов.

При некоторых подходящих предположениях существование, единственность и регулярность слабого решения задачи Коши (1) -(2) и их варианты были тщательно исследованы многими авторами (см. [2-4] и ссылки в них).

Если $u_0(x) \ge 0$, $v_0(x) \ge 0$ достаточно гладкое, существует множество работ о разрешимости задачи Коши (1)-(2), мы можем сослаться на Wu-Zhao [5], Gmira [6], Yang-Zhao [7], Zhao [8-10], Zhao-Yuan [11], Dibenedetto-Friedman [12], LiHia [13], Dibenedetto-Herrero [14], Beniland-Crandal Pierre [15], Zhao-Xu [16], Fan [17] и ссылки на них для получения подробной информации.

ISSN 2181-

Herero Escobedo [18] рассмотрел проблему Коши в случае системы с источниками $L_1(u) \equiv -\dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + v^{\beta_1} = 0,\ L_2(v) \equiv -\dfrac{\partial v}{\partial t} + \Delta v + u^{\beta_1} = 0$ и доказал, что условие blow-up решения является $\dfrac{\beta_i + 1}{\beta_1 \beta_2 - 1} > N/2,\ i = 1,2$.

На сегодняшний день многие авторы устанавливали асимптотику решения для одно-компонентной задачи (1)-(2), мы же в этой статье мы изучим асимптотическое поведение (для $t \to \infty$) решений системы (двух-компонентной) полулинейной задачи теплопроводности с поглощением при критическом параметре (1)-(2) и проведем вычислительный эксперимент.

Асимптотика решений.

На основе метода эталонных уравнений [19], решение задачи (1) - (2) будем искать в следующем виде

$$u(t,x) = \bar{u}(t)\omega_1(x,\tau(t))\ \ v(t,x) = \bar{v}(t)\omega_2(x,\tau(t)), \tag{3}$$

где

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = H((T+t)\ln(T+t))^{-\frac{\beta_1+1}{\beta_1\beta_2-1}}, \\ \bar{v}(t) = H_1((T+t)\ln(T+t))^{-\frac{\beta_1+1}{\beta_1\beta_2-1}}. \end{cases} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и выбирая $\tau(t)$ так $\tau(t) = T + t$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial \tau} = \nabla \omega_1 - \dfrac{d\bar{u}}{dt}\bar{u}^{-1}\omega_1 - \bar{u}^{-1}\bar{v}^{\beta_1}\omega_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial \tau} = \nabla \omega_2 - \dfrac{d\bar{v}}{dt}\bar{v}^{-1}\omega_2 - \bar{v}^{-1}\bar{u}^{\beta_2}\omega_1^{\beta_2}. \end{cases}$$

Теперь положим $\omega(\tau,x) = f(\xi)$ для (1) - (2) получим автомодельное уравнение:

$$\begin{cases} \xi^{1-N}\dfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\dfrac{df_1}{d\xi}\right)+\dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_1}{d\xi}-\dfrac{c(\ln\tau+1)}{\ln\tau}f_1-\dfrac{H_1^{\beta_1}}{H}\dfrac{f_2^{\beta_1}}{\ln\tau}=0, \\ \xi^{1-N}\dfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\dfrac{df_2}{d\xi}\right)+\dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_2}{d\xi}-\dfrac{c_1(\ln\tau+1)}{\ln\tau}f_2-\dfrac{H^{\beta_2}}{H_1}\dfrac{f_1^{\beta_2}}{\ln\tau}=0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\xi=|x|[\tau(t)]^{-1/2}$, $c=-\dfrac{\beta_1+1}{\beta_1\beta_2-1}, c_1=-\dfrac{\beta_2+1}{\beta_1\beta_2-1}$.

Теорема 1. Пусть $H\le\dfrac{2H_1^{\beta_1}}{N}$ u $c_1\ge-\dfrac{N}{2}$.

Тогда для $t\to+\infty$ решение задачи (1) - (2), ограничено сверху функциями $u_+(t,x), v_+(t,x)$. То есть $u(t,x)\le u_+(t,x)=\bar u(t)\,\bar f_1(\xi), v(t,x)\le v_+(t,x)=\bar v(t)\,\bar f_2(\xi)$.

Доказательство. Покажем, что $u_+(t,x)$, $v_+(t,x)$ является верхнем решением задачи (1)-(2). В качестве решения уравнения (5) возьмем следующую функцию:

$$\bar f=e^{-\frac{\xi^2}{4}} \tag{6}$$

Поставив $u_+(t,x), v_+(t,x)$ в (3.1), мы получим следующие оценки:

$$\begin{cases} -\dfrac{N-1}{2}\bar f-\dfrac{\bar f}{2}-\dfrac{c(\ln\tau+1)}{\ln\tau}\bar f-\dfrac{H_1^{\beta_1}}{H}\dfrac{\bar f^{\beta_1}}{\ln\tau}\le 0, \\ -\dfrac{N-1}{2}\bar f-\dfrac{\bar f}{2}-\dfrac{c_1(\ln\tau+1)}{\ln\tau}\bar f-\dfrac{H^{\beta_2}}{H_1}\dfrac{\bar f^{\beta_2}}{\ln\tau}\le 0. \end{cases}.$$

Для выполнения этих условия достаточно выполнения следующих условий:

$\dfrac{N}{2}-\dfrac{H_1^{\beta_1}}{H}\le 0$ u $-\dfrac{N}{2}-c_1\le 0$.

Эти условия справедливы в силу условий теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $H>\dfrac{2H_1^{\beta_1}}{N}$ u $c_1<-\dfrac{N}{2}$.

Тогда для $t\to+\infty$ решение задачи (1) - (2) ограничено снизу функцией $u_-(t,x), v_-(t,x)$. То есть $u(t,x)\ge u_-(t,x)=\bar u(t)\,\bar f_1(\xi), v(t,x)\ge v_-(t,x)=\bar v(t)\,\bar f_2(\xi)$.

Доказательство. Покажем, что $u_-(t,x)$, $v_-(t,x)$ является нижним решением задачи (1) - (2). В качестве решения уравнения (5) возьмем функцию (6).

ISSN 2181-

Поставив $u_-(t,x)$, $v_-(t,x)$ в (3.1), мы получим следующие оценки:

$$\begin{cases} -\dfrac{N-1}{2}\overline{f}-\dfrac{\overline{f}}{2}-\dfrac{c(\ln\tau+1)}{\ln\tau}\overline{f}-\dfrac{H_1^{\beta_1}}{H}\dfrac{\overline{f}^{\beta_1}}{\ln\tau}>0, \\ -\dfrac{N-1}{2}\overline{f}-\dfrac{\overline{f}}{2}-\dfrac{c_1(\ln\tau+1)}{\ln\tau}\overline{f}-\dfrac{H^{\beta_2}}{H_1}\dfrac{\overline{f}^{\beta_2}}{\ln\tau}>0. \end{cases}$$

Для выполнения этих условия достаточно выполнения следующих условий:

$$\frac{N}{2}-\frac{H_1^{\beta_1}}{H}>0 \ u \ -\frac{N}{2}-c_1>0.$$

Эти условия справедливы в силу условий теоремы 2.

Из последних двух теорем следует, что для всех больших t автомодельное решение $\overline{u}(t)\overline{f}(\xi),\overline{v}(t)\overline{f}(\xi)$ ограничено сверху и снизу.

$$u_+(t,x)=\overline{u}(t)\overline{f}(\xi)\geq u(t,x)\geq u_-(t,x)=\overline{u}(t)\overline{f}(\xi),$$
$$v_+(t,x)=\overline{v}(t)\overline{f}(\xi)\geq v(t,x)\geq v_-(t,x)=\overline{v}(t)\overline{f}(\xi).$$

Вычислительный эксперимент

Для задачи (1)-(2) мы имеем следующую одномерную систему полулинейных уравнений теплопроводности в области $Q=\{(t,x): t\in[0,T],\quad x\in[a,b]\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-v^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-u^{\beta_2}, \end{cases} \tag{7}$$

с начальными

$$u(0,x)=u_0(x)\geq 0,\quad x\in[a,b],$$
$$v(0,x)=v_0(x)\geq 0,\quad x\in[a,b],$$

и граничными условиями

$$u(t,a)=\varphi_1(t)\geq 0,\quad t\in[0,T],$$
$$u(t,b)=\varphi_2(t)\geq 0,\quad t\in[0,T],$$
$$v(t,a)=\psi_1(t)\geq 0,\quad t\in[0,T],$$
$$v(t,b)=\psi_2(t)\geq 0,\quad t\in[0,T].$$

Здесь β_1, β_2 - положительные постоянные, $u_0(x)$ и $v_0(x)$ - начальное распределения соответственно первой и второй компоненты, $\phi_1(t)$ - значение первой компоненты на левой границе, $\phi_2(t)$ - значение первой компоненты на правой границе, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ - соответственно для второй компоненты.

Построим равномерную сетку для задачи (7) $\bar{\omega}_h$ по x с шагом h:

$\bar{\omega}_h=\{x_i=ih,\quad h>0,\quad i=0,1,...,n,\quad hn=b\}$ и временную сетку с шагом τ

$\bar{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\quad \tau>0,\quad j=0,1,...,m,\quad \tau m=T\}$. Заменим задачу (7) неявной двухслойной разностной схемой и получим следующую разностную схему с ошибкой $\mathrm{O}(h^2+\tau)$:

$$\begin{cases}\dfrac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\dfrac{y_{i+1}^{j+1}-2y_i^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}}{h^2}-(Y_i^j)^{\beta_1}, & \\ & i=1,2,...,n-1; \quad j=0,1,...,m-1,\\ \dfrac{Y_i^{j+1}-Y_i^j}{\tau}=\dfrac{Y_{i+1}^{j+1}-2Y_i^{j+1}+Y_{i-1}^{j+1}}{h^2}-(y_i^j)^{\beta_2}, & \\ y_i^0=u_0(x_i),\ i=0,1,...,n,\ y_0^j=\phi_1(t_j), & j=1,2,...,m,\\ y_n^j=\phi_2(t_j),\ j=1,2,...,m,\ Y_i^0=v_0(x_i), & i=0,1,...,n,\\ Y_0^j=\psi_1(t_j),\ j=1,2,...,m\ Y_n^j=\psi_2(t_j), & j=1,2,...,m.\end{cases} \tag{8}$$

Из разностной схемы (8) мы найдем коэффициенты трехдиагональной матрицы A, B, C, F, A_1, B_1, C_1, F_1 и решим следующую систему линейных уравнений методом прогонки [20]

$$\begin{cases}A_i^j y_{i-1}^{j+1}-C_i^j y_i^{j+1}+B_i^j y_{i+1}^{j+1}=-F_i^j,\\ A_{1i}^j Y_{i-1}^{j+1}-C_{1i}^j Y_i^{j+1}+B_{1i}^j Y_{i+1}^{j+1}=-F_{1i}^j,\ i=1,2,..,n-1,\ j=0,1,2,..,m-1,\end{cases}$$

с граничными условиями $y_0=\chi_1 y_1+\mu_1$, $y_N=\chi_2 y_{N-1}+\mu_2$ и $Y_0=\delta_1 Y_1+\gamma_1$, $Y_N=\delta_2 Y_{N-1}+\gamma_2$,

где

ISSN 2181-

$$A_i^j = \frac{\tau}{h^2},\ B_i^j = \frac{\tau}{h^2},\ C_i^j = A_i^j + B_i^j + 1,\ F_i^j = y_i^j - \tau\left(Y_i^j\right)^{\beta_1},$$

$$A_{1i}^j = A_i^j,\ B_{1i}^j = B_i^j,\ C_{1i}^j = A_i^j + B_i^j,\ F_{1i}^j = Y_i^j - \tau\left(y_i^j\right)^{\beta_2}.$$

В качестве начального приближения мы должны взять следующее:

$$u = H\left((T+t)\ln(T+t)\right)^{-\frac{\beta_1+1}{\beta_1\beta_2-1}} e^{\frac{-|x|^2}{4(T+t)}} \quad , \quad v = H_1\left((T+t)\ln(T+t)\right)^{-\frac{\beta_2+1}{\beta_1\beta_2-1}} e^{\frac{-|x|^2}{4(T+t)}}.$$

Значения β_1, β_2 должны удовлетворять следующему выражению

$$\frac{\beta_1+1}{\beta_1\beta_2-1} = \frac{N}{2}.$$

где для одномерного случая $N=1$.

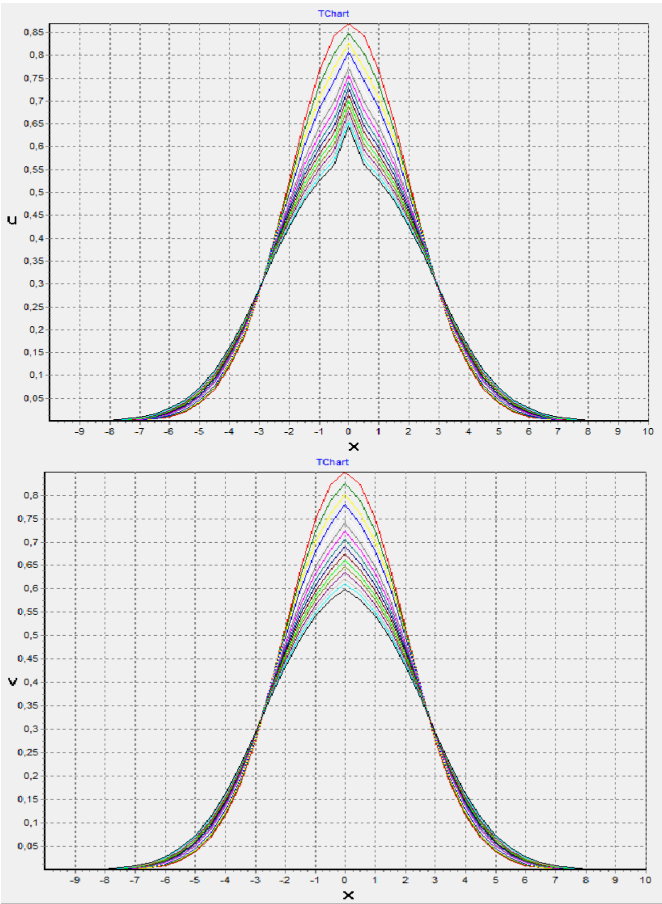

Рис. 1. Визуализация процесса при критическом параметре при $\beta_1=3.5$, $\beta_2=2.85$, $H=1$, $H_1=1$, $T=2$

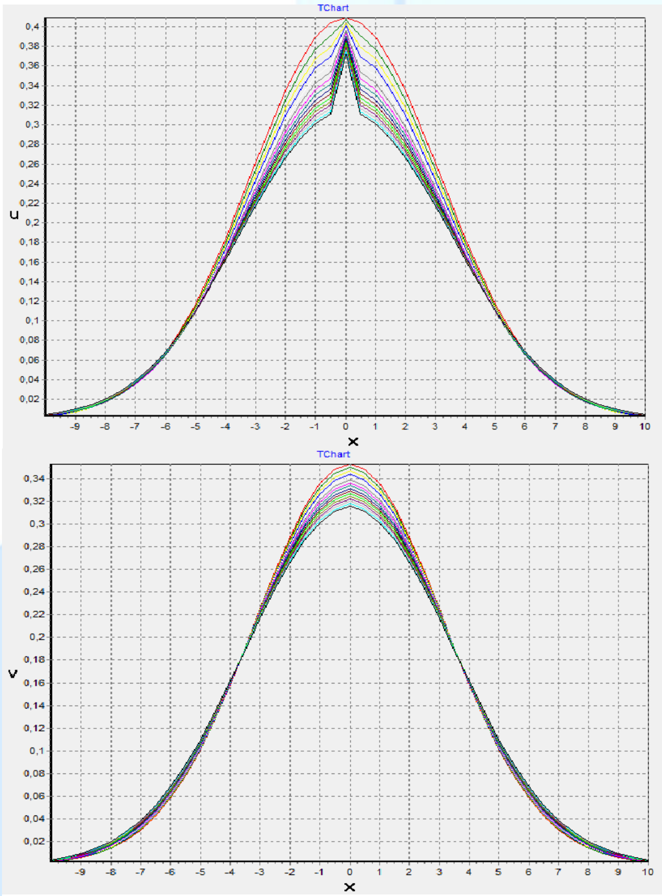

Рис. 2. Визуализация процесса при критическом параметре при $\beta_1=3.5$, $\beta_2=2.85$, $H=1$, $H_1=1$, $T=5$

ISSN 2181-

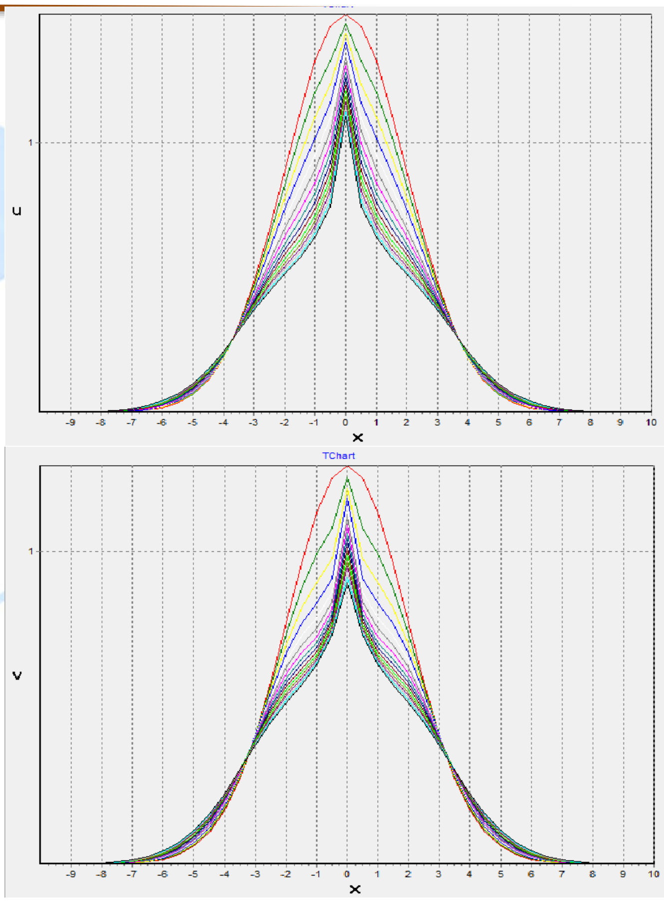

Рис. 3. Визуализация процесса при критическом параметре при $\beta_1=3.5$, $\beta_2=2.85$, $H=1.5$, $H_1=1.7$, $T=2$

Как видно из рисунка 1, в каждый момент времени температура в определенных точках снижается (плоскость опускается), что указывает на наличие поглощения.

Параметр T влияет на глубину распространения температуры. Это означает, что чем больше этот параметр, тем меньше глубина распространения температуры для u и v. Более того, для v он оказывает более существенное влияние. Это можно наблюдать по рисунку 2.

Параметры H, H_1 также влияют на глубину. Чем больше данные параметры, тем больше глубина распространения температуры u и v соответственно, как видно из рисунка 3.

Заключение

Мы доказали, что численный анализ результатов, основанный на полученных оценках решения, дает исчерпывающую картину процесса в двухкомпонентных системах с сохранением свойств конечной скорости распространения.

При критических значениях параметра асимптотическое поведение решения изменится. Предложенный метод выбора начального приближения оказался эффективным и позволяет численно определять процессы с конечной скоростью распространения.

Литература

[1] H. Fujita, "On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for ut = Δu+u 1+α", Journal of the Faculty of Science University of Tokyo A, 16, 1966, pp.105–113.

[2] P. Cianci, A. V. Martynenko, and A. F. Tedeev, "The blow-up phenomenon for degenerate parabolic equations with variable coefficients and nonlinear source," Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications A, vol. 73, no. 7, pp. 2310–2323, 2010.

[3] E. Di Benedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Universitext, Springer, New York, NY, USA, 1993.

[4] J. N. Zhao, "On the Cauchy problem and initial traces for the evolution p-Laplacian equations with strongly nonlinear sources," Journal of Differential Equations, vol. 121, no. 2, pp. 329–383, 1995.

[5] Z. Wu, J. Zhao, J. Yun and F. Li, Nonlinear *Diffusion Equations* New York, Singapore: World Scientific Publishing, 2001.

[6] Gmira, "On quasilinear parabolic equations involving measure date, Asymptotic Analysis" North-Holland, 3, 1990, pp. 43-56.

[7] J. Yang and J. Zhao, "A note to the evolutional P-Laplace equation with absorption", Acta. Sci. Nat. Jilin. 2, 1995, pp. 35-38.

[8] J. Zhao, "Source-type solutions of quasilinear degenerate parabolic equation with absorption", Chin. Ann. of Math., ISB1, 1994, pp. 89-104.

[9] J. Zhao, "Existence and nonexistence of solution for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$", J. Math. Anal. Appl. 172, 1993, pp. 130-146.

[10] J. Zhao, “The Cauchy problem for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ when 2N/(N+1) < p < 2”, Nonlinear Anal. T.M.A. 24, 1995, pp. 615-630.

[11] J. Zhao and H. Yuan, “The Cauchy problem of a class of doubly degenerate parabolic equation” (in chinese), Chinese Ann. Of Math. 16As2, 1995, pp. 181-196.

[12] E. Dibenedetto and A. Friedman, “HOlder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems”, J. reine. Angew. Math. 357, 1985, pp. 1- 22.

[13] Y. Li and Ch. Xie, “Blow-up for p-Laplace parabolic equations”, E. J. D. E. (20)2003, 2003, pp. 1-12.

[14] E. Dibenedetto and M. A.Herrero, “On Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equations”, Trans.Amer. Soc. 314, 1989 pp. 187-224.

[15] Ph. Benilan, M. G. Crandall and M. Pierre, “Solutions of the porous medium equation in RN under optimal conditions on initial values”, Indiana Univ., Math. J. 33, 1984, pp. 51-71.

[16] J. Zhao and Z. Xu, “Cauchy problem and initial traces for a doubly degenerate parabolic equation”, Sci.in China, Ser.A, 39, 1996, pp. 673-684.

[17] H. Fan, “Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure”, Acta Math. Sinica, EnglishSer. 20, 2004, pp. 663-682.

[18] M. Escobedo, H. A. Levine “Critical blowup and global existence for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations”. Arch. Rat. Mech. Anal., 129, 1995, pp.47–100.

[19] М.Арипов, *Метод эталонных уравнений для решение нелинейных краевых задач*, Ташкент, 1986, с. 137.

[20] А.А. Самарский, А.В.Гулин, *Численные методы*, Наука, 1989, с.432.