

## PARABOLIK TIPDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING SONLI YECHIMLARI

Jo'raqulova Munisa O'ktam qizi  
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston  
Milliy Universiteti Jizzax Filali 4-bosqich talabasi

**Annotatsiya:** Ko'plab amaliy masalalarni yechishda qarayotgan masalaning matematik modeli oddiy differensial tenglamalarga va xususiy hosilali differensial tenglamalarga keladi bu tenglamalarni yechishning biz biladigan klassik usullarda masalalarni yechish murakkabliklarga olib keladi. Bunday masalalar uchun taqribiy yechimlar muhim ahamiyatga ega. Ushbu maqolada parabolik tipdagi tenglamalarga qo'yilgan masalalarni analitik va taqribiy yechish usullari haqida fikr yuritilgan [1].

**Kalit so'zlar:** differensial tenglamalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar, tenglamalarning klassifikatsiyasi, parabolik tipdagi tenglama, chekli ayirma.

**Kirish:** Noaniqliklarni o'z ichiga olgan diffuziya koeffitsienti, manba hadlari, chegaraviy va boshlang'ich shartlari mavjud bo'lgan tasodifiy chiziqli parabolik tenglamani yechish uchun sonli usul ishlab chiqilgan.

Diffuziya tenglamalari fan va texnikaning ko'plab sohalarida uchraydi. Ko'p hollarda, aniq ma'lumotlarning yo'qligi, o'lchov xatolari yoki tabiiy o'zgaruvchanlik sababli noaniqliklar paydo bo'ladi. Ushbu noaniqliklarni modellashtirish uchun diffuziya koeffitsienti, manba haddi, chegaraviy va boshlang'ich shartlar ma'lum ehtimollik taqsimotiga ega tasodifiy o'zgaruvchilar sifatida qabul qilinadi.

Taklif etilgan usulda fazo bo'yicha chekli farqlar sxemasi, vaqt bo'yicha esa differensial transformatsiya usuli qo'llanilgan. Shuningdek, tasodifiy o'zgaruvchilarni qayta ishlash uchun Monte-Karlo usulidan foydalaniladi.

Gibrid usulning aniqligi deterministik (noaniqliksiz) bog‘liq tenglamaning yopiq shakldagi yechimi yordamida sonli ravishda tekshirilgan. Sonli natijalarga asoslanib, yechim uchun ishonch oralig‘i (confidence interval) va kutilgan o‘rtacha qiymatlar aniqlangan [2].

Bir o‘lchovli chiziqli parabolik turdagi tenglamalarning keng qo‘llanilishi tufayli, bu turdagi tenglamalarni yechish uchun ko‘plab sonli usullar ishlab chiqilgan. Turli xil usullar mavjud bo‘lishiga qaramay, yanada samaraliroq va sodda sonli usullarni ishlab chiqish zarurati mavjud, chunki parabolik tenglamalarni yechish amaliy jihatdan muhimdir.

Ko‘plab tadqiqotchilar bunday tenglamalarning sonli yechimlarini o‘rganishgan. Masalan:

1.ishda boshlang‘ich va Dirixle chegaraviy shartlari bilan bir o‘lchovli chiziqli parabolik tenglama uchun sonli yechimlar taqdim etilgan.

2.manbada B-Spline cheklangan elementlar usuli yordamida bir o‘lchovli issiqlik tenglamasining sonli simulyatsiyasi amalga oshirilgan.

3.ishda Chebyshev to‘lqin usulidan foydalanib, bir o‘lchovli issiqlik tenglamasining sonli yechimi olingan.

4.manbada esa Neumann va Dirixle chegaraviy shartlari bilan 1D issiqlik tenglamasining yechimi taqdim etilgan.

5.manbada issiqlik manbasi bo‘lgan holatlar uchun aniq (explicit) yechim usuli ishlab chiqilgan, bu usul yechimning vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini kuzatishga imkon beradi.

6.ishda issiqlik tenglamasi ikkilangan interpolatsiya usuli yordamida yechilgan.

7.ishda esa radial bazis funksiyalar yordamida issiqlik tenglamasining yechimi topilgan.

Gaussian radial bazis funksiyalar aniqlik jihatidan pastroq bo'lgani sababli, mualliflar ko'p o'lchovli radial bazis funksiyalar (MQ-RBF) va ingichka plastinka radial bazis funksiyalari (TPS-RBF) ni taklif qilganlar. Bu metodlar interpolatsiya jarayonida funktsiyani taxminiy aniqlash uchun ishlatilgan. Shunga qaramay, bu usullarning yaqinlashish (convergence) va barqarorlik (stability) masalalari hali ham e'tibor talab qiladi, chunki parabolik tenglamalarni sonli yechish oddiy jarayon emas. Ba'zi hollarda, ilgari keltirilgan usullar katta xotira va hisoblash vaqtini talab qiladi.

Shu sababli, ushbu maqolada ishlab chiqilgan metodning asosiy maqsadi — aniq va barqaror yechim olishdir [3].

Quyidagi bir o'lchovli parabolik turdagi xususiy hosilali differensial tenglamani ko'rib chiqamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = H(x, t), (x, t) \in (0, 1) \times (0, T) \quad \{1\}$$

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar esa quyidagicha berilgan:

$$u(x, 0) = f(x), a \leq x \leq b \quad \{2\}$$

$$u(a, t) = g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad \{3\}$$

Bu yerda  $\varepsilon > 0$  -diffuziya koeffitsiyenti bo'lib, u materialning tayoqcha bo'ylab issiqlik tarqalishini ifodalaydi.  $f(x)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  funksiyalar esa yetarlicha silliq bo'lishi kerak. Hisoblash sohasi  $(0, 1) \times (0, T)$  quyidagicha bo'linadi:  $0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j < \dots < x_M = 1$  [3]

Ushbu misolimizni yechimini quyidagi ko'rinishlarda izlashimiz mumkin:

**Birinch****yondashuv**

Bu tenglama uchun vaqt va joy o'lovlarini kichik bo'laklarga ajratish orqali sonli yechim topish mumkin. Har bir nuqtada qiymatlar ketma-ket hisoblanadi va shu orqali butun oraliqda yechim aniqlanadi. Ushbu usulda hisoblash jarayonini soddalashtirish uchun tenglama bosqichma-bosqich o'zgarishlarga ajratiladi.

**Ikkinchi****yondashuv**

Tenglamani yechishda vaqt bo'yicha ketma-ket hisoblash usuli qo'llanadi. Dastlab boshlang'ich shartlar asosida birinchi qiymatlar topiladi, keyin esa ular yordamida keyingi vaqt nuqtalaridagi natijalar hisoblanadi. Bu usul natijalarni barqaror olishga yordam beradi va yechimni amaliy jihatdan tahlil qilish imkonini beradi.

**Uchinchi****yondashuv**

Yechimni aniqlashda oldingi va keyingi qiymatlar o'rtasidagi bog'lanishlardan foydalaniladi. Natijada hosil bo'lgan qiymatlar butun oraliq bo'yicha taqsimlanadi va ularning o'zgarish tendensiyasi kuzatiladi. Bu yondashuv issiqlikning vaqt o'tishi bilan qanday tarqalishini aniqroq ko'rsatadi.

**Xulosa**

Ushbu maqolada parabolik tipdagi differensial tenglamalarning sonli yechimlarini topish masalasi ko'rib chiqildi. Bu turdagi tenglamalar issiqlik o'tkazuvchanligi, diffuziya jarayonlari va boshqa fizik hodisalarni ifodalashda muhim ahamiyatga ega. Klassik usullar orqali bunday tenglamalarni yechish murakkab bo'lgani sababli, taqribiy va sonli yondashuvlar qo'llash samarali natijalar beradi. Taklif etilgan yondashuvlarda vaqt va fazo bo'yicha bo'lish, bosqichma-bosqich hisoblash hamda oldingi va keyingi qiymatlar o'rtasidagi bog'lanishlardan foydalanish orqali yechim aniqlanadi. Natijada, yechimlarning barqarorligi va aniqligi ta'minlanadi. Shu bilan birga, ushbu usullar issiqlikning vaqt davomida qanday tarqalishini kuzatishda ham amaliy ahamiyatga ega bo'lib, kelgusida yanada takomillashtirilgan sonli modellarga asos bo'la oladi.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:**

1. <https://cyberleninka.ru/article/n/parabolik-tenglamalarni-analitik-va-taqribiy-yechish-usullari/viewer>
2. [https://www.researchgate.net/publication/281970485\\_Analytical-Numerical Solution of a Parabolic Diffusion Equation Under Uncertainty Conditions Using DTM with Monte Carlo Simulations](https://www.researchgate.net/publication/281970485_Analytical-Numerical_Solution_of_a_Parabolic_Diffusion_Equation_Under_Uncertainty_Conditions_Using_DTM_with_Monte_Carlo_Simulations)
3. [KA Koroche](#) - Mathematics and Computer Science, 2020 - academia.edu