

KLASSIK MEXANIKAGA OID BA'ZI MASALALARDA DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH

Sattorova Mohichehra Azizbek qizi

Qo'qon Davlat universiteti 2-bosqich talabasi

mohichehrasattorova29@gmail.com

ANNOTATSIYA. Ushbu maqolada klassik mexanikaning ayrim masalalarida uchraydigan differensial tenglamalarni yechishning umumiy usullari tahlil qilindi. Kuchning vaqtga, koordinataga yoki tezlikka bog'liq bo'lgan holatlari alohida ko'rib chiqilib, ularning har biri uchun harakat tenglamalarini hosil qilish algoritmlari ishlab chiqildi.

ABSTRACT. This article analyzes general methods for solving differential equations that arise in classical mechanics. Cases in which the force depends on time, position, or velocity are examined separately, and systematic procedures for deriving the equations of motion.

АННОТАЦИЯ. В данной статье рассматриваются общие методы решения дифференциальных уравнений, возникающих в классической механике. Отдельно анализируются случаи, когда сила зависит от времени, координаты или скорости. Для каждого случая систематически выводятся уравнения движения.

Kalit so'zlar: klassik mexanika, differensial tenglama, harakat tenglamasi, havo qarshiligi.

Keywords: classical mechanics, differential equation, equation of motion, drag force.

Ключевые слова: классическая механика, дифференциальное уравнение, уравнение движения, сила сопротивления.

Jismga ta'sir etayotgan kuch, vaqtga, koordinataga yoki tezlikka bog'liq funksiya sifatida berilgan holatda $F = ma = m\ddot{x}$ differensial tenglamasini yechib, vaqtga bog'liq holda $x(t)$ koordinata funksiyasi aniqlanishi zarur bo'lsin. Quyida biz bu ko'rinishdagi masalalardagi differensial tenglamalarni yechishning bir nechta uslublarini ishlab chiqamiz. Ushbu uslublarni samarali qo'llay olish ko'pgina fizik tizimlarning harakatini tahlil qilish imkonini beradi.

Shuningdek, kuch F vaqt t , koordinata x va tezlik v ga qo'shimcha ravishda x ning yuqori tartibli hosilalariga ham bog'liq bo'lishi mumkin. Ammo bunday holatlar amalda juda kam uchraydi.

Demak, differensial tenglama $F = ma$ quyidagi ko'rinishni oladi (bu yerda biz masalani bir o'lchamli fazoda ko'rib chiqamiz):

$$m\ddot{x} = F(t, x, v). \quad (1)$$

Umuman olganda, ushbu tenglamani $x(t)$ uchun aniq ko'rinishda yechishning imkoni bo'lmasligi mumkin. Biroq biz ko'rib chiqadigan masalalarning aksariyatida bu tenglama yechiladi. Masalalar ko'pincha uchta holatdan biriga kiradi, ya'ni kuch F faqat vaqtga, yoki faqat koordinataga, yoki faqat tezlikka bog'liq bo'ladi. Bu holatlarning barchasida yakuniy yechimni topish uchun boshlang'ich shartlarni qo'llashimiz zarur bo'ladi ($x_0 \equiv x(t_0)$ va $v_0 \equiv v(t_0)$).

Quyida yuqorida ta'kidlangan uchta holatlarni alohida tahlil qilib ko'raylik:

1. F faqat vaqtning funksiyasi: $F = F(t)$.

Tezlanish $a = d^2x/dt^2$ bo'lganligi sababli, $F = ma$ tenglamasini ikki marta integrallab $x(t)$ ni aniqlash mumkin. Umumiy tartibni o'rganib olish uchun buni juda tizimli tarzda bajaramiz. Birinchi qadam $F = ma$ ni quyidagicha yozish:

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) \quad (2)$$

So'ng esa o'zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning har ikki tomonini integrallaymiz:

$$m \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0}^t F(t') dt' \quad (3)$$

Integrallash o'zgaruvchilari bilan chegaralarni almashtirmaslik uchun ularga belgi qo'yildi, ammo amaliyotda odatda bunga ehtiyoj bo'lmaydi, chunki dv' ning integrali shunchaki v' bo'lishi ma'lum. (3)-tenglama v ning vaqtga bog'liqligini, ya'ni $v(t)$ funksiyasini beradi. Shundan so'ng $dx/dt \equiv v(t)$ tenglamasida o'zgaruvchilarni ajratib, integrallash orqali quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (4)$$

Natijada x ning vaqtga bog'liqligi, ya'ni $x(t)$ hosil bo'ladi.

2. F faqat x ga bog'liq funksiyadir: $F = F(x)$.

Ushbu holatni tahlil etishda quyidagi ifodadan foydalaniladi:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} \quad (5)$$

$F = ma$ ni yuqoridagi ifodadan foydalanib $mv \frac{dv}{dx} = F(x)$ ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi.

Endi o'zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning har ikki tomonini integrallaymiz.

$$m \int_{v_0}^{v(x)} v' dv' = \int_{x_0}^x F(x') dx' \quad (6)$$

v' ning integrali $\frac{v'^2}{2}$ ga teng bo'ladi, shuning uchun chap tomonda $v(x)$ ning kvadrati paydo bo'ladi. Kvadrat ildizini olganda, v ning x ga bog'liqligi, ya'ni $v(x)$, hosil bo'ladi. Shundan so'ng $\frac{dx}{dt} \equiv v(x)$ ifodadan $x(t)$ o'zgaruvchilarni ajratish orqali olinadi.

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{v(x')} = \int_{t_0}^t dt' \quad (7)$$

Agar chap tomondagi integralni hisoblash mumkin bo'lsa, ushbu tenglama t ni x ga bog'liq funksiyasini beradi. Shundan so'ng (nazariy jihatdan) natijani teskari aylantirib, x ni t ga bog'liq funksiya sifatida, ya'ni $x(t)$, olish mumkin. Afsuski, bu holatda (7)-tenglamadagi integralni hisoblash har doim ham mumkin bo'lmasligi mumkin. Hatto integral hisoblanadigan bo'lsa ham, $t(x)$ ni teskari aylantirib $x(t)$ hosil qilish imkoni bo'lmasligi ehtimoli ham mavjud.

3. F faqat v ga bog'liq funksiyadir: $F = F(v)$.

$F = ma$ ni quyidagicha ifodalash mumkin bo'ladi:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \quad (8)$$

O'zgaruvchilarni ajratib, tenglamaning har ikki tomoni integrallanganidan so'ng quyidagi ifodaga ega bo'linadi:

$$m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^t dt' \quad (9)$$

Agar ushbu integralni hisoblash mumkin bo'lsa, u t ning v ga bog'liqligini beradi va shu bois (nazariy jihatdan) v ning vaqtga bog'liqligi, ya'ni $v(t)$ hosil qilinadi. Shundan so'ng $dx/dt \equiv v(t)$ tenglamasini integrallab $x(t)$ ni quyidagidan aniqlash mumkin bo'ladi:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (10)$$

Quyida ba'zi masalalarning yechimini yuqorida ko'rsatib o'tilgan tushunchalar asosida taqdim etamiz:

1-Masala. Massasi m bo'lgan zarracha $F = -mg$ doimiy kuch ta'sirida harakatlanadi. Zarracha balandligi h bo'lgan nuqtadan tinch holatdan harakatni boshlaydi. Ushbu doimiy kuch vaqtga ham, masofaga ham bog'liq bo'lgani uchun, $y(t)$ ifodasini ikki xil usulda aniqlang [3].

a) Tezlanishni $a = dv/dt$ ko'rinishida yozib, $y(t)$ ni toping.

b) Tezlanishni $a = v dv/dy$ ko'rinishida yozib, $y(t)$ ni toping.

Yechilishi:

a) $F = ma$ tenglamasi $dv/dt = -g$ ga olib keladi. dt ga ko'paytirib integrallash natijasida $v = -gt + A$, bu yerda A integrallash konstantasi. Boshlang'ich shart $v(0) = 0$ dan $A = 0$ chiqadi. Shunday qilib, $dy/dt = -gt$. Bu ifodani dt ga ko'paytirib integrallaganimizda: $y = -gt^2/2 + B$. Boshlang'ich shart $y(0) = h$ dan $B = h$. Shunday qilib,

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (11)$$

b) $F = ma$ tenglamasi $v dv/dy = -g$ ifodasini beradi. O'zgaruvchilarni ajratib integrallash natijasida: $v^2/2 = -gy + C$. Boshlang'ich shart $v(h) = 0$ dan: $v^2/2 = -gy + gh$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $v \equiv dy/dt = -\sqrt{2g(h-y)}$. Zarracha pastga tushayotgani uchun manfiy ildiz tanlandi. O'zgaruvchilarni ajratish natijasida quyidagiga kelamiz:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\sqrt{2g} \int dt \quad (12)$$

Bu quyidagi natijani beradi: $2\sqrt{h-y} = \sqrt{2g}t$, bu yerda biz boshlang'ich shart $y(0) = h$ dan foydalandik. Demak, $y = h - gt^2/2$, ya'ni (a)-qismdagi natija

bilan bir xil. Bu yerda (b)-qismda biz aslida energiyaning saqlanish qonunini hosil qildik.

2-masala. Sharcha balandligi h bo'lgan nuqtadan tinch holatdan tashlandi. Havo ta'siridagi qarshilik kuchi quyidagi ko'rinishga ega deb faraz qilamiz: $F_d = -\beta v$ Tezlikni va balandlikni vaqtning funksiyasi sifatida toping [4].

Yechilishi. Endilikda kiritadigan formulalarni soddalashtirish uchun sudrash kuchini $F_d = -\beta v = -m\alpha v$ ko'rinishida yozamiz (aks holda formulalarda bir qancha $1/m$ lar paydo bo'lardi). Yuqoriga yo'nalishni musbat y o'qi deb olsak, sharga ta'sir etayotgan umumiy kuch quyidagicha bo'ladi:

$$F = -mg - m\alpha v. \quad (13)$$

E'tibor bering, bu yerda v manfiy, chunki shar pastga tushmoqda. Shuning uchun sudrash kuchi yuqoriga yo'naladi – bu fizik ma'noda to'g'ri. $F = m dv/dt$ tenglamasini yozib, o'zgaruvchilarni ajratsak, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv'}{g + \alpha v'} = - \int_0^t dt' \quad (14)$$

Integrallash natijasida $\ln(1 + \alpha v/g) = -\alpha t$ ifodasiga ega bo'lamiz. Eksponensiallash esa quyidagini beradi:

$$v(t) = -\frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \quad (15)$$

$dy/dt \equiv v(t)$ deb yozib, so'ng o'zgaruvchilarni ajratib $y(t)$ ni topish uchun integrallasak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_h^{y(t)} dy' = -\frac{g}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{-\alpha t'}) dt' \quad (16)$$

Natijada,

$$y(t) = h - \frac{g}{\alpha} \left(t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right) \quad (17)$$

Xulosa sifatida shuni ta'kidlab o'tish kerakki, yuqoridagi uchta holatni yodlash shart emas, chunki masalada berilgan ma'lumotlar va izlanayotgan kattalikka qarab turli vaziyatlar yuzaga keladi. Esda tutishingiz kerak bo'lgan yagona narsa shuki, $\ddot{x}$ ni dv/dt yoki vdv/dx ko'rinishida yozish mumkin. Ushbu ifodalardan biri (differensial tenglamada uchta o'zgaruvchidan faqat ikkitasi – t , x yoki v ishtirok etadigan holat uchun) masalani yechishga imkon beradi [1]. Shundan so'ng o'zgaruvchilarni ajratish va zarur bo'lsa, bir necha marta integrallashga tayyor bo'lish yetarli.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Herbert Goldstein. "Classical Mechanics", 3rd Edition, Addison-Wesley, 2002.
2. L. D. Landau, E. M. Lifshitz. "Mechanics" (Course of Theoretical Physics, Vol.1), 3rd Edition, Butterworth-Heinemann, 1976.
3. I. I. Gusev. "Problems in Classical Mechanics", Moscow, 2001.
4. D. Kleppner, R. Kolenkow. "An Introduction to Mechanics", 2nd Edition, Cambridge University Press, 2014.