# HILBERT FAZOSIDA CHIZIQLI OPERATORLARNING TUZILISHI VA ULARNING BARQARORLIK MEZONLARI

***Hikmatova Gulhayo Rashit qizi***
***Navoiy davlat unversiteti***

***Annotatsiya:*** *Ushbu maqolada Gilbert fazosida chiziqli chegaralangan operatorlar nazariyasi atroflicha yoritilgan. Jumladan, operator tushunchasi, operatorning aniqlanish va qiymatlar sohasi, bir jinsli operator, additiv operator, chiziqli operator hamda chegaralangan operator kabi asosiy tushunchalarga aniqlik kiritilgan. Har bir tushunchaga oid ta'rif va ularning xossalarini ifodalovchi teoremalar keltirilgan. Shuningdek, operatorning normasi va uning asosiy xususiyatlari tahlil qilingan. Maqolada keltirilgan misollar orqali bu turdagi operatorlarning amaliyotdagi qo'llanilishi, xususan, matematik analiz va funksional analizdagi ahamiyati ko'rsatib berilgan.*

***Kalit so'zlar:*** *operator, operatorning aniqlanish va qiymatlar sohasi, bir jinsli operator, additiv operator, chiziqli operator, chegaralangan operator, chegaralanmagan operator, operatorning normasi.*

*KIRISH*

Matematik analizning zamonaviy tarmoqlaridan biri bo'lgan funksional analiz chiziqli operatorlar nazariyasini chuqur o'rganish orqali matematik modellashtirish va amaliy masalalarni tahlil qilishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, **Hilbert fazosi** chiziqli operatorlarning turli turlarini — chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma, unitar, normal va kompakt operatorlarni — tadqiq qilish uchun eng qulay strukturalardan biridir.

Chiziqli operatorlarning tuzilishi ularning algebraik va geometrik xossalari orqali aniqlanadi. Bunday operatorlarning asosiy fazoviy xususiyatlari — **uzluksizlik**, **chegaralanganlik**, **normalizatsiya** va **barqarorlik** — funksional analizda operatorlarning ishlash printsipini belgilaydi. Shu jihatdan, Hilbert fazosida operatorlarning barqarorlik mezonlarini aniqlash ularning fizik, mexanik va texnik tizimlardagi tatbiqlarini o‘rganishda asosiy o‘rin tutadi.

Barqarorlik masalasi operator nazariyasining markaziy tushunchalaridan biri bo‘lib, u chiziqli tizimlarning vaqt o‘tishi bilan o‘z holatini qanday saqlab qolishini tavsiflaydi. Masalan, differensial yoki integral tenglamalar orqali ifodalangan fizik jarayonlarning yechimlari aynan operatorning barqarorligiga bog‘liq bo‘ladi. Shu bois Hilbert fazosida operatorlarning tuzilishini tahlil qilish va ularning barqarorlik mezonlarini aniqlash matematik analiz, kvant mexanikasi, signallarni qayta ishlash hamda kompyuter modellashtirish sohalarida keng tatbiq topadi.

Mazkur tadqiqotning dolzarbligi shundan iboratki, **Hilbert fazosidagi chiziqli operatorlarning tuzilishini aniqlash orqali ularning spektral, normaviy va barqarorlik xossalarini o‘rganish** imkoniyati yaratiladi. Bu esa nazariy jihatdan operatorlar tizimini yanada chuqur tushunishga, amaliy jihatdan esa barqaror tizimlarni loyihalashda matematik asos yaratishga xizmat qiladi.

*ADABIYOTLAR TAHLILI*

Chiziqli operatorlar nazariyasi va ularning Hilbert fazosidagi xossalari bo‘yicha olib borilgan ilmiy izlanishlar XX asr boshlaridan boshlab faol rivojlandi. **D. Gilbert**, **J. fon Neyman**, **F. Riss**, **S. Banax**, **M. Stoun** kabi olimlar funksional analizning poydevorini yaratgan bo‘lib, aynan ular chiziqli operatorlarning chegaralanganlik va uzluksizlik shartlarini qat’iy aniqlab berganlar.

**J. fon Neyman** o‘zining “Mathematical Foundations of Quantum Mechanics” asarida Hilbert fazosida chiziqli operatorlar yordamida kvant sistemalarini ifodalashni taklif qilgan. Uning ishi operatorlarning o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi va barqarorligi orasidagi bog‘liqlikni matematik jihatdan asoslab berdi. **M. Stoun** esa unitar operatorlarning barqarorlik mezonlarini o‘rganib, ular orqali chiziqli tizimlarning vaqt bo‘yicha rivojlanishini tahlil qilgan.

Keyinchalik **F. Riss** va **B. Sz.-Nagy** tomonidan chiziqli operatorlarning strukturaviy xususiyatlari, ayniqsa ularning chegaralanganlik mezonlari, normaviy xossalari hamda kompozitsiya ostida yopiq bo‘lish shartlari keng yoritilgan. Ularning

“Functional Analysis” (1955) asari Hilbert fazosidagi operatorlar nazariyasining asosiy manbalaridan biri hisoblanadi.

Operatorlarning barqarorligi masalasida **T. Kato** (1966) “Perturbation Theory for Linear Operators” asarida operatorlar tizimining kichik o‘zgarishlarga nisbatan sezgirligini matematik tarzda ifodalab, barqarorlikni spektral xususiyatlar bilan bog‘ladi. **N. Dunford** va **J. Schwartz** esa “Linear Operators” nomli ko‘p jildli asarlarida operatorlarning chegaralanganlik va normallik shartlari asosida barqaror tizimlarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqdilar.

So‘nggi yillarda Hilbert fazosida operatorlarning barqarorlik shartlari raqamli hisoblash va differensial operatorlarni modellashtirishda ham keng qo‘llanilmoqda. Jumladan, **A. Karimov**, **S. Sobirov**, **V. Oripov** va **L. Mamatov** kabi o‘zbek olimlari o‘z tadqiqotlarida operatorlarning turg‘unlik va barqarorlik nazariyasini sonli metodlar bilan uyg‘unlashtirish yo‘lida muhim natijalarga erishganlar.

Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, Hilbert fazosida chiziqli operatorlarning tuzilishini chuqur o‘rganish ularning **spektral, normaviy va barqarorlik** xususiyatlarini tahlil qilish uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Shu bois bu yo‘nalishdagi tadqiqotlar nafaqat matematik analizni rivojlantirish, balki uni amaliy tizimlarga tatbiq etish nuqtayi nazaridan ham dolzarbdir.

**ASOSIY QISM**.

Bizga $H_1$ va $H_2$ Gilbert fazolari berilgan bo‘lsin.

**Ta`rif 1.** *Agar* $H_1$ *fazoning har bir elementiga* $H_2$ *fazoning yagona elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, bu moslik* **operator** *deyiladi va* $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *yoki* $y = Ax$ $(\ \in H_1\ \ y \in H_2)$ *kabi belgilanadi.*

Umuman $A$ operator $x \in H_1$ ning hamma yerida aniqlangan bo‘lishi shart emas. Bu holda $Ax$ mavjud va $Ax \in H_2$ bo‘lgan barcha $x \in H_1$ lar to‘plami

$A$ operatorning **aniqlanish sohasi** deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya`ni

$$(A) = \{\ x \in H_1 :\quad Ax\ mavjud\ va\ \ A\,x \in H_2\}$$

Biror $x \in (A)$ uchun $y = Ax$ bajariladigan $y \in H_2$ lar

ISSN 2181-

to‘plami $A$

operatorning **qiymatlar sohasi** yoki **tasviri** deyiladi va $R(A)$ bilan belgilanadi.

$$(A) = \{y \in H_2: \quad \exists x \in D(A), \ \ Ax = y\}.$$

Misol uchun $A: \ell_2 \longrightarrow \ell_2, \ \ Ax = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots)$

operatorning aniqlanish sohasi butun fazoga teng emas. Chunki bu operator $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \in \ell_2$

vektorni $Ax_0 = (1,1,1,\dots,1,\dots)$ vektorga o‘tkazadi va bu vektor $\ell_2$ fazoning elementi bo‘lmaydi, ya’ni $x_0$ bu operatorning aniqlanish sohasiga teng emas. Agar $H_1$ va $H_2$ lar chiziqli fazolar bo‘lib, istalgan $x \in H_1$ va $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $(\lambda x) = \lambda Ax$ munosabat bajarilsa, $A$ operator **bir jinsli** deyiladi. Agar istalgan $x, y \in H_1$ uchun $(x + y) = Ax + Ay$ munosabat bajarilsa, u holda $A$ operator **additiv** deyiladi.

**Ta'rif 2.** *Bir jinsli additiv operator* **chiziqli operator** *deyiladi.*

Demak biror operatorni chiziqlilikka tekshirish uchun uni additivlik va bir jinslilikka tekshirish lozim. Chiziqli operatorning ta’rifiga ekvivalent quyidagi ta’rifni ham keltirib o‘tish foydadan xoli bo‘lmaydi:

**Ta'rif 3.** *Agar ixtiyoriy* $, y \in H_1$ *va* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *lar uchun*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

*tenglik bajarilsa, u holda* $A$ **operator chiziqli** *deyiladi.*

Lekin chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chiziqli ko‘pxillik bo‘lishi talab etiladi. Operatorning aniqlanish sohasi $(A)$ deb belgilanadi. $(A)$ deb esa $A$ operatorning qiymatlar to‘plamini belgilaymiz:

$$(A) = \{y \in H_2: \exists x \in D(A), \ \ Ax = y\}.$$

**Misol 1.** $A: L_2(\mathbb{T}^d) \longrightarrow L_2(\mathbb{T}^d), \ (Af)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} v(x - y)f(y)dy$ *integral operatorni qaraymiz, bu yerda* $v(\cdot)$ *biror uzluksiz funksiya. Bu operatorning aniqlanish sohasi* $(A) = L_2(\mathbb{T}^d)$. *Chiziqli ekanligi esa integralning chiziqli ekanligidan kelib chiqadi.*

Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik tushunchasi odatdagi funksiyaning chegaralanganligi tushunchasidan biroz farq qiladi.

ISSN 2181-

Faraz qilamiz,$_1$, $H_2$ lar Hilbert fazolari bo‘lsin.

**Ta'rif 4.** *Agar* $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *operator* $H_1$ *dagi istalgan chegaralangan to‘plamni* $H_2$ *dagi chegaralangan to‘plamga o‘tkazsa, u* **chegaralangan operator** *deyiladi.*

Demak chegaralanmagan operator biror chegaralangan to‘plamni chegaralanmagan to‘plamga o‘tkazadi. Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik ta’rifini quyidagicha ham berish mumkin:

**Ta'rif 5.** $H_1$ *va* $H_2$ *Hilbert fazolari va* $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *chiziqli operator bo‘lsin.*

*Agar biror* $M > 0$ *son va istalgan* $x \in H_1$ *uchun*

$$\| Ax \|_{H_2} \leq M \| x \|_{H_1}$$

tengsizlik bajarilsa, $A$ **chegaralangan operator** deyiladi. Agar istalgan $M$ soni uchun shunday $x_M \in H_1$ element mavjud bo‘lib, $\| Ax_M \|_{H_2} > M \| x_M \|_{H_1}$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, $A$ **chegaralanmagan operator** deyiladi.

Agar $A$ operator chegaralanmagan bo‘lsa, uning normasi $\infty$ ga teng deb qabul qilamiz.

**Misol 3.** $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $Az = (z_1, 2z_2, \ldots, nz_n)$ *operatorni qaraylik.*

$$\| Az \|^2 = \sum_{k=1}^{n} |kz_k|^2 \leq n^2 \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = n^2 \| z \|^2$$

munosabatga asosan $\| Az \| \leq n \| z \|$. Demak, ta’rifga asosan $A$ chegaralangan operator.

**Ta'rif 6.** $H_1$ *va* $H_2$ *Hilbert fazolari va* $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *chiziqli operator bo‘lsin. Istalgan* $x \in H_1$ *uchun* $\| Ax \|_{H_2} \leq M \| x \|_{H_1}$ *munosabat bajariluvchi* $M > 0$ *sonlarning aniq quyi chegarasi* $A$ **operatorning normasi** *deyiladi va u* $\| A \|$ *kabi belgilanadi.*

Amalda operatorning normasini topishda quyidagi teoremadan ko‘proq foydalaniladi.

**Teorema 1.** $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *chiziqli operatorning normasi uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:*

1. $\| \overline{A} \| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$ ;

2. $\| A \| = \sup\limits_{\|x\|_{H_1} < 1}$

3. $\| A \| = \sup\limits_{\|x\|_{H_1} = 1}$

$\| Ax \|_{H_2}$ ;

$\| Ax \|_{H_2}$ .

*Chiziqli chegaralangan operator xossalari:*

$1^0$. *Agar* $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *va* $B: H_1 \longrightarrow H_2$ *chiziqli operatorlar chegaralangan bo'lsa, u holda ularning yig`indisi* $A + B$ *operator ham chegaralangan va* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *bo'ladi.*

$2^0$. *Agar* $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *chiziqli operatorlar chegaralangan bo'lsa, u holda* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ *uchun* $\alpha A$ *operator ham chegaralangan.*

$3^0$. *Agar* $A: H_1 \longrightarrow H_2$ *va* $B: H_1 \longrightarrow H_2$ *chiziqli operatorlar chegaralangan bo'lsa, u holda* $AB$ *va* $BA$ *operator ham chegaralangan va* $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ *bo'ladi.*

**Ta'rif 7. (Geyne)** $X$ *va* $Y$ *normalangan fazolar va* $A: X \longrightarrow Y$ *chiziqli operator bo'lsin. Agar* $x_0 \in X$ *elementga intiluvchi ixtiyoriy* $\{x_n\} \in X$ *ketma-ketlik uchun* $\{Ax_n\} \in Y$ *ketma-ketlik* $Ax_0 \in Y$ *elementga intilsa,* $A$ *operator* $x_0$ **nuqtada uzluksiz** *deyiladi. Agar A operator X fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa u* **butun fazoda uzluksiz** *deyiladi.* Ma`lumki uzluksiz funksiya chegaralangan bo'ladi. Chiziqli operatorlar uchun esa uzluksizlik va chegaralanganlik tushunchalari ekvivalent.

**Teorema 2.** *$H_1$ va $H_2$ Hilbert fazolari va $A: H_1 \longrightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Quyidagi tasdiqlar ekvivalent:*

1. $A$ operator 0 nuqtada uzluksiz;
2. $A$ operator butun $X$ fazoda uzluksiz;
3. $A$ operator chegaralangan.

**Misol 3.** *$\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ fazoda quyidagi opratorni aniqlaymiz:*

$A: \ell_2(\mathbb{Z}^d) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, $(Af)(x) = \hat{\varepsilon}(x)\hat{f}(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $\hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, bunda $\hat{\varepsilon}(x)$ – $\mathbb{Z}^d$ da aniqlangan biror funksiya. Ravshanki, $A$ chiziqli operator. Bu operatorning aniqlanish sohasi

$$(A) = \{\hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d): \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(x)\hat{f}(x)|^2 < \infty\}$$

to'plamdir. Quyidagi teorema o'rinli:

**Teorema 3.** *$A$ operatorning aniqlanish sohasi butun $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ fazoga teng bo'lishi uchun bo'lishi zarur va yetarli.*

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(x)| < \infty$$

**Misol 4.** $L_2(\mathbb{T}^d)$ *fazoda aniqlangan ko'paytirish operatorini qaraymiz:*

$(Af)(x) = (x)f(x)$, $f \in L_2(\mathbb{T}^d), x \in \mathbb{T}^d$,

bunda $\varepsilon(x)$ – $\mathbb{T}^d$ da aniqlanga biror kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. Ko'rinib turibdiki, $A$ operator chiziqli. Uning aniqlanish sohasi

$$(A) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^d): \int_{d} |\varepsilon(x)f(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Quyidagi to'plamni kiritamiz:

$x\in\mathbb{T}$

$$X(f) = \{x \in \mathbb{T}^d: |f(x)| > n\}, \; f \in L_2(\mathbb{T}^d), n \in \mathbb{N}.$$

**Ta'rif 8.** *Agar biror $n$ natural son uchun $(X_n(f)) = 0$ bo'lsa,*
$f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ *funksiya* **muhim chegaralangan***deyiladi, bu yerda $\mu(M)$ – $M$*

ISSN 2181-

*to‘plamning Lebeg o‘lchovi.*

Demak, muhim chegaralanmagan $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ funksiya uchun barcha natural $n$ larda $\mu(X_n(f)) > 0$ shart bajariladi.

**Xulosalar**

**Teorema 4.** *A operatorning aniqlanish sohasi butun* $L_2(\mathbb{T}^d)$ *fazoga teng bo‘lishi uchun* $\varepsilon(x)$ *funksiyaning muhim chegaralangan bo‘lishi yetarli va zarur.*

**Misol 5.** $L_2(\mathbb{T}^d)$ *fazoda aniqlangan quyidagi operatorni qaraymiz:*

$$(Af)(t) = \int_{\mathbb{T}^d} (t,x)f(x)dx, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^d),$$

bunda $K(t,x)$ funksiya $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ da aniqlangan biror o‘lchovli kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. Integralning chiziqliligidan, bu operator chiziqli. Agar

$$\int_{\mathbb{T}^d}\int |(t,x)|^2 dtdx < \infty$$

bo‘lsa, u chegaralangan operator bo‘ladi (Fubini teoremasi). Bunday operator integral operator deb ataladi. $(t,x)$ funksiya esa uning yadrosi deyiladi.

### *Foydalanilgan adabiyotlar*


1. M.I.Mo‘minov, C.Lokman Finiteness of discrete spectrum of the two-particle Schödinger operatori on diamond lattices. Nanosystems; physics, chemistry matematics, 2017, 8(3), P. 310-316.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
3. Nafasov, G., Xudoyqulov, R., & Usmonov, N. (2023). Developing logical thinking skills in mathematics teachers through digital technologies. Евразийский журнал технологий и инноваций, 1(5 Part 2), 229-233.
4. *Usmonov, N. M. (2024). Maple paketi orqali oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarini yechish. Экономика и социум, (12-2 (127)), 928-935.*
5. *Муминов М.Э., А.М. Хуррамов А.М.* Спектральные свойства двухчастичного

ISSN 2181-

гамильтониана на одномерный решетке // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 177, №. 4. С. 102–110.

6. *Муминов М.Э.* О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. 2007. Т.153, №. 3. С. 381–387.

7. Usmonov, N. M. (2022). Kompleks argumentli trigonometrik va giperbolik funksiyalar. *Вестник магистратуры*, (6-3 (129)), 4-6.