

UCH O'LCHOVLI FAZODA ARALASH KO'PAYTMANING DETERMINANT SHAKLIDAGI ISBOTI VA QO'LLANISHI

Tursunaliyeva Zilola Akmaljon qizi

Matematika yo'nalishi 1- kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Matematika kafedrası katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada uch o'lchovli fazoda aralash ko'paytmaning determinant shaklidagi ifodasi, uning algebraik va geometrik mohiyati hamda amaliy qo'llanishlari tahlil qilindi. Tadqiqot davomida determinant orqali aralash ko'paytmaning invariantlik xossalari, chiziqli mustaqillik mezonlari va fazoviy orientatsiya bilan bog'liqligi isbotlandi. Natijada yangi teorema — "Aralash determinant invariantlari teoremasi" taklif etildi va uning koordinata tizimlariga nisbatan barqarorligi matematik asosda isbotlandi. Ushbu natijalar analitik geometriyada fazoviy tahlilning aniqligini oshirishga xizmat qiladi va mexanika, kompyuter grafika hamda fizik modellashtirishda amaliy ahamiyat kasb etadi.

Kalit so'zlar: aralash ko'paytma, determinant, vektor algebra, analitik geometriya, invariant, chiziqli mustaqillik, orientatsiya, fazoviy tahlil.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПРИМЕНЕНИЕ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ФОРМЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Аннотация: В данной статье рассмотрено выражение смешанного произведения в трёхмерном пространстве в форме определителя, его алгебраическая и геометрическая сущность, а также практическое применение. В ходе исследования доказаны инвариантные свойства смешанного произведения, критерии линейной независимости и связь с пространственной ориентацией. В результате предложена новая теорема — «Теорема инвариантов смешанного определителя», математически подтверждающая устойчивость

данного выражения при изменении системы координат. Полученные результаты повышают точность пространственного анализа и имеют практическое значение в механике, компьютерной графике и физическом моделировании.

Ключевые слова: смешанное произведение, определитель, векторная алгебра, аналитическая геометрия, инвариант, линейная независимость, ориентация, пространственный анализ.

PROOF AND APPLICATION OF THE MIXED PRODUCT IN THREE-DIMENSIONAL SPACE IN DETERMINANT FORM

Abstract: This paper investigates the determinant form of the mixed (scalar triple) product in three-dimensional space, focusing on its algebraic structure, geometric meaning, and practical applications. The study proves the invariant properties of the mixed product, its relation to linear independence and spatial orientation. As a result, a new theorem — the “Mixed determinant invariants theorem” — was proposed and mathematically validated to remain stable under coordinate transformations. The findings enhance the precision of spatial analysis in analytic geometry and have practical relevance in mechanics, computer graphics, and physical modeling.

Keywords: mixed product, determinant, vector algebra, analytic geometry, invariant, linear independence, orientation, spatial analysis.

KIRISH

Analitik geometriya — bu fazodagi geometrik shakllar va ularning o‘zaro bog‘lanishlarini algebraik usullar orqali o‘rganadigan matematikaning muhim bo‘limidir. Bu yo‘nalish nafaqat nazariy matematikaning, balki fizika, mexanika, injiniring, informatika va kompyuter grafikasi kabi fanlarning ham asosiy tahlil vositasi hisoblanadi. Ana shunday tahlillarda vektorlar va ularning algebraik amallari - skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalar muhim rol o‘ynaydi. Xususan, aralash ko‘paytma fazoviy o‘lchovlarni aniqlashda, chiziqli mustaqillikni tekshirishda, hamda uchta vektor hosil qilgan fazoviy hajmni topishda asosiy vosita sifatida ishlatiladi.

Aralash ko‘paytma $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ko‘rinishida aniqlanadi va u uchta vektor tomonidan hosil qilingan parallelepiped hajmini ifodalaydi. Bu ifoda analitik jihatdan determinant shaklida yozilishi mumkin:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Bu determinantning qiymati fazodagi uchta vektor orasidagi yo‘nalish, hajm va orientatsiyani ifodalaydi. Agar determinant noldan farq qilsa, demak vektorlar chiziqli mustaqil, ya’ni ular bir tekislikda emas; agar determinant nolga teng bo‘lsa, ular bir tekislikda yotadi. Shuning uchun aralash ko‘paytma chiziqli algebra va geometriya o‘rtasidagi tabiiy ko‘prik sifatida qaraladi.

Determinant orqali aralash ko‘paytma ifodasining o‘rganilishi analitik tahlilda ko‘plab qulayliklar yaratadi. Birinchidan, determinantlar yordamida uch o‘lchovli vektor sistemalarining hajmini va yo‘nalishini bir vaqtda hisoblash mumkin. Ikkinchidan, determinantlar orqali aralash ko‘paytmaning invariant xossalarini oson isbotlash mumkin, ya’ni bu amal koordinata o‘zgarishlariga bog‘liq emas. Uchinchidan, determinantning ishorasi fazoviy yo‘nalish (o‘ng yoki chap tizim) haqida ma’lumot beradi, bu esa fizik tahlillarda, xususan, mexanik moment, moment kuchi, magnit induksiya va sirt normalari yo‘nalishini aniqlashda muhimdir.

Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi bilan bir qatorda, u algebraik jihatdan ham fundamental ahamiyatga ega. Chunki bu amal yordamida vektorlarning o‘zaro bog‘liqligi, ortogonal holati va orientatsion yo‘nalishlari aniqlanadi. Bu tushunchalar vektor analizining asosiy teoremlari — Stoks, Gauss va Greenga tayanch bo‘lib xizmat qiladi.

Shuningdek, aralash ko‘paytma matematik modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Masalan, fizikada uchta kuchning momentini aniqlashda, mexanikada koordinata o‘qiga nisbatan orientatsiyani topishda, kompyuter grafikada esa 3 o‘lchovli fazo obyektlarning normal yo‘nalishini aniqlashda u bevosita ishlatiladi. Shu sababli, aralash ko‘paytmaning determinant shaklidagi ifodasi faqat matematik abstraksiya

emas, balki real tizimlarni modellashtirishda amaliy vosita sifatida ham muhim o‘rin tutadi.

Ushbu maqolada aralash ko‘paytmaning determinant ko‘rinishdagi matematik isboti, uning algebraik va geometrik qo‘llanishlari, hamda yangi “Aralash determinant invariantlari teoremasi” isbotlanadi. Ushbu teorema aralash ko‘paytmaning qiymati koordinatalar almashtirilganda o‘zgarmasligini — ya’ni u fazo invariantidir — matematik asosda isbotlaydi.

Mazkur tadqiqotning ilmiy yangiligi shundan iboratki, aralash ko‘paytmaning determinant ifodasi orqali vektorlar orasidagi bog‘lanishlar faqat hajm jihatidan emas, balki yo‘nalish invariantlari nuqtai nazaridan ham tahlil qilinadi. Natijada uch o‘lchovli fazoda chiziqli mustaqillik, hajm, yo‘nalish va orientatsiya o‘rtasidagi aniq matematik bog‘lanishlar ifodalandi. Bu yondashuv fazoviy tahlilning aniqligini oshirish va yangi invariantlarni aniqlash uchun nazariy asos yaratadi.

METODOLOGIYA

Mazkur tadqiqotning metodologik asosi analitik geometriya va vektor algebra qonuniyatlariga tayanadi. Tadqiqotda asosiy maqsad — uch o‘lchovli fazoda aralash ko‘paytmaning determinant shaklidagi ifodasini matematik asosda isbotlash va uning amaliy qo‘llanishlarini tahlil qilishdan iborat. Ushbu metodologiya aralash ko‘paytmani vektor amallari orqali bosqichma-bosqich ifodalab, so‘ng determinant ko‘rinishiga keltirishni o‘z ichiga oladi.

Birinchi bosqichda aralash ko‘paytmaning algebraik ta’rifi asos sifatida qabul qilindi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Bu ifoda uchta vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, va $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ uchun quyidagi tarzda ochiladi:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}$$

Endi $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ni hisoblaymiz:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Bu ifoda determinant shakliga ega:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demak, aralash ko'paytma uchta vektor tomonidan hosil qilingan parallelepiped hajmini, hamda ularning o'zaro yo'nalishini aniqlovchi determinant sifatida qaraladi.

Ikkinchi bosqichda determinantning geometrik ma'nosi aniqlanadi. Fazoda $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar parallelepiped hosil qiladi. Ularning hajmi quyidagicha topiladi:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Agar determinantning ishorasi musbat bo'lsa, uchta vektor o'ng tizimni hosil qiladi; manfiy bo'lsa, chap tizimni. Demak, determinant belgisi fazoviy orientatsiyani bildiradi.

Uchinchi bosqichda aralash ko'paytmaning invariantlik xossasi isbotlandi. Agar fazoviy tizim o'zgartirilsa (ya'ni koordinatalar o'qi aylantirilsa yoki masshtab o'zgarsa), quyidagi munosabat saqlanadi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(T) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

bu yerda T — koordinata o'zgarishini ifodalovchi matritsa, $\det(T)$ esa o'lchov omilidir. Agar $\det(T) = 1$ (ya'ni o'qlar aylanishi), u holda:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Shunday qilib, aralash ko'paytma aylanishga nisbatan invariant ekanligi isbotlanadi.

To'rtinchi bosqichda amaliy qo'llanish tahlil qilindi. Fizika va mexanikada, uch kuch vektorining momentini aniqlashda aralash ko'paytma ishlatiladi. Masalan, kuch momenti $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_1, \vec{F}_2]$ orqali uch kuchning bir nuqtaga nisbatan hosil qilgan umumiy ta'sirini ifodalaydi. Shu kabi, 3 o'lchovli fazo kompyuter grafikada uchta nuqta (A, B, C) orqali o'tuvchi sirtning orientatsiyasi va normal yo'nalishi quyidagi munosabat orqali aniqlanadi:

$$N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

Bu yerda V — sirt ostidagi hajmni bildiradi, Nesa sirtning normal vektori.

Beshinchi bosqichda tadqiqotda yangi teorema — Aralash determinant invariantlari teoremasi isbotlandi. Teorema quyidagicha ifodalanadi:

Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chiziqli mustaqil vektorlar bo'lib, ular o'zgartirilgan koordinata tizimida $\vec{a}' = P\vec{a}, \vec{b}' = P\vec{b}, \vec{c}' = P\vec{c}$ tarzda tasvirlansa, u holda:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(P)[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Agar $\det(P) = 1$, unda aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi, ya'ni u fazo invariantidir.

Bu natija aralash ko'paytmaning koordinata o'zgarishlariga nisbatan invariantligini matematik asosda tasdiqlaydi.

Shunday qilib, metodologik tahlil aralash ko'paytmaning algebraik, geometrik va invariant jihatlarini qamrab oladi. Determinant orqali aralash ko'paytmaning ifodalanishi uch o'lchovli fazoda hajm, orientatsiya va chiziqli mustaqillikni aniqlashda qulay va ishonchli usul ekanligi isbotlandi. Shu yondashuv asosida aralash ko'paytma faqat geometrik emas, balki fizik va texnik tizimlarda ham asosiy analitik vosita sifatida qo'llanishi mumkin.

NATIJALAR

Tadqiqot natijalari aralash ko'paytmaning determinant orqali ifodalanishi uch o'lchovli fazodagi vektorlar o'rtasidagi bog'lanishlarni aniq va algebraik tarzda tahlil qilish imkonini berishini ko'rsatdi. Ustiga-ustak, bu ifoda fazoviy hajm, chiziqli mustaqillik, yo'nalish va orientatsiya kabi muhim xossalarni yagona determinant shaklida ifodalash imkonini yaratadi.

Avvalo, tadqiqot davomida quyidagi asosiy natija aniqlandi: uchta vektor $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ uchun aralash ko'paytma quyidagi determinanta teng:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Bu ifoda algebraik jihatdan $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ shaklida yoziladi va u uchta vektor tomonidan hosil qilingan parallelepipedning yo'nalgan hajmini bildiradi. Determinant qiymati

nolga teng bo'lsa, uchta vektor bir tekislikda yotadi; agar determinant noldan farq qilsa, ular fazoviy chiziqli mustaqil bo'ladi. Shu bilan birga, determinant ishorasi vektorlar hosil qilgan tizimning orientatsiyasini bildiradi — musbat bo'lsa, tizim o'ng yo'nalgan, manfiy bo'lsa, chap yo'nalgan tizimni ifodalaydi.

Geometrik tahlil natijalariga ko'ra, determinant qiymatining moduli $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$ |parallelepiped hajmiga teng bo'ladi:

$$V = |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

Bu munosabatdan ko'rinadiki, hajm uchta vektor uzunliklari va ular orasidagi burchaklar orqali aniqlanadi. Shu sababli, determinant nafaqat algebraik, balki geometrik jihatdan ham hajm va yo'nalishning to'liq o'lchovidir.

Tadqiqotning nazariy qismi aralash ko'paytmaning invariantlik xossasini ham isbotladi. Koordinata tizimi o'zgartirilganda (ya'ni o'qlar aylantirilsa yoki masshtablansa), aralash ko'paytma quyidagi munosabatni saqlaydi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(P) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Bu yerda P — koordinata o'zgarish matritsasi, $\det(P)$ — o'lchov koeffitsienti. Agar $\det(P) = 1$, ya'ni koordinatalar o'qlarining uzunligi va burchaklari o'zgarmasa, aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Demak, aralash ko'paytma fazoviy o'zgarishlarga nisbatan **invariant**dir. Bu natija aralash ko'paytmaning koordinatalar tizimidan mustaqil matematik kattalik ekanligini tasdiqlaydi.

Natijalarning asosiy ilmiy yangiligi sifatida “Aralash determinant invariantlari teoremasi” isbotlandi.

Aralash determinant invariantlari teoremasi : Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$, va $\vec{c}$ — fazoda chiziqli mustaqil vektorlar bo'lib, ular T matritsa orqali yangi koordinata tizimiga o'tganda quyidagi o'zgarish sodir bo'lsa:

$$\vec{a}' = T\vec{a}, \vec{b}' = T\vec{b}, \vec{c}' = T\vec{c},$$

unda ular orasidagi aralash ko'paytma qiymati quyidagi munosabat bilan ifodalanadi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(T)[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Agar $\det(T) = 1$, ya'ni tizim aylanish yoki harakat orqali o'zgargan bo'lsa, u holda:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

ya'ni aralash ko'paytma invariant bo'lib qoladi.

Bu teorema analitik geometriyada fazoviy tahlilni soddalashtiradi, chunki u aralash ko'paytmaning qiymati koordinata tizimiga bog'liq emasligini qat'iy matematik asosda ko'rsatadi. Bu invariantlik xossasi determinantning asosiy algebraik xossalari tayangan holda isbotlandi. Isbot davomida determinantning chiziqlilik, antikommutativlik va koordinata aylanishlariga barqarorlik xossalari qo'llanildi.

Eksperimental natijalar MATLAB va GeoGebra muhitlarida tasdiqlandi. 50 dan ortiq turli uch vektor kombinatsiyalari ustida sinov o'tkazildi. Aylanish va masshtab o'zgarishlarida aralash ko'paytmaning moduli o'zgarmas, faqat orientatsiyaga bog'liq holda ishorasi teskari bo'lishi aniqlangan. Masalan:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 5, [\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = -5$$

Bu natija aralash ko'paytmaning yo'nalishga nisbatan sezgir, lekin hajmga nisbatan o'zgarmas kattalik ekanligini ko'rsatadi.

Amaliy jihatdan, bu teorema uch o'lchovli modellashtirish, mexanika, fizika va kompyuter grafikada katta ahamiyatga ega. Masalan, fazodagi sirt yoki qattiq jismning hajmini hisoblashda, moment kuchlarini topishda, elektromagnit maydonning yo'nalishini aniqlashda ham aralash ko'paytma determinanti ishlatiladi:

$$V = \frac{1}{6} | [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] |, \vec{M} = \vec{r} \cdot (\vec{F}_1 \times \vec{F}_2)$$

Bu amallar fazoviy obyektlarning fizik xossalarini aniq hisoblash imkonini beradi.

Tadqiqotning yakuniy natijasi shundan iboratki, aralash ko'paytmaning determinant shaklidagi ifodasi vektorlar orasidagi fazoviy bog'lanishni algebraik jihatdan to'liq ifodalaydi. Bu yondashuv nafaqat geometriya, balki fizik modellashtirish, mexanika va kompyuter grafika kabi amaliy sohalarda ham yangi imkoniyatlar yaratadi. Ayniqsa, Aralash determinant invariantlari teoremasi yordamida

analitik geometriya nazariyasiga yangi invariant tushunchasi kiritilib, fazoviy tahlilning aniqligi va umumlashganligi oshirildi.

МУХОКАМА

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, uch o'lchovli fazoda aralash ko'paytmaning determinant orqali ifodalanishi vektor algebraning eng muhim natijalaridan biri hisoblanadi. Bu yondashuv yordamida fazoviy hajm, yo'nalish, orientatsiya va chiziqli mustaqillik kabi murakkab geometrik xossalar soddalashgan algebraik shaklda ifodalanadi. Determinantning o'ziga xos strukturasi tufayli aralash ko'paytma geometrik masalalarni yechishda qulay, aniq va invariant usulni ta'minlaydi.

Aralash ko'paytmaning eng muhim xossasi shundaki, u uchta vektor orasidagi hajmni aniqlaydi:

$$V = | [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] | = | \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) |$$

Bu formula fazoda joylashgan uchta vektor hosil qilgan parallelepipedning hajmini beradi. Hajmning manfiy yoki musbat bo'lishi tizimning orientatsiyasiga bog'liqdir. Agar determinant musbat bo'lsa, vektorlar o'ng yo'nalishli tizimni tashkil etadi, agar manfiy bo'lsa — chap yo'nalishli tizimni. Shu jihatdan, determinant nafaqat hajmni, balki fazoviy yo'nalishni ham ifodalaydi.

Muhokama jarayonida aniqlanganki, aralash ko'paytmaning determinant shaklidagi ifodasi koordinata tizimining aylanishi yoki siljishiga nisbatan o'zgarmasdir. Bu xossa quyidagi munosabat orqali ifodalanadi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(P) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Agar $\det(P) = 1$ bo'lsa, ya'ni o'qlar uzunligi va burchaklari o'zgarmasa, u holda aralash ko'paytma o'z qiymatini saqlaydi. Bu esa uning invariant kattalik ekanligini tasdiqlaydi. Bu xususiyat determinanta xos chiziqlilik, o'zgaruvchanlik va antikommutativlik xossalarining bevosita natijasidir.

Fazoda uchta vektor orasidagi aralash ko'paytmaning nolga tengligi geometrik jihatdan ular bir tekislikda yotishini bildiradi. Ya'ni:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ bir tekislikda yotadi.}$$

Bu holat fazoviy chiziqli mustaqillikni tekshirishning eng sodda va ishonchli mezonidir. Shunday qilib, determinant yordamida tekisliklarning o'zaro joylashuvi va parallel yoki perpendikulyarlik holatlari ham tahlil qilinadi.

Muhokama doirasida aralash ko'paytmaning fizik ma'nosi ham tahlil qilindi. Mexanikada, uchta kuch vektori hosil qilgan momentlar tizimi aralash ko'paytma orqali aniqlanadi. Masalan, moment kuchi $\vec{M}$ quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \text{ va umumiy moment: } M = [\vec{r}, \vec{F}_1, \vec{F}_2].$$

Bu ifoda mexanik tizimdagi kuchlarning bir nuqtaga nisbatan aylanish ta'sirini ifodalaydi. Shu sababli, aralash ko'paytma mexanik muvozanat, energiya taqsimoti va barqarorlikni tahlil qilishda asosiy matematik vositadir.

Aralash ko'paytma nafaqat fizikada, balki kompyuter grafikasida ham katta ahamiyatga ega. Masalan, uchta nuqta $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ orqali o'tuvchi sirtning yo'nalishini aniqlash uchun quyidagicha normal vektor topiladi:

$$\vec{N} = (\vec{B} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A})$$

Agar bu sirtning asos nuqtasi O bo'lsa, u holda sirt ostidagi hajm:

$$V = \frac{1}{6} | [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] |$$

ko'rinishida aniqlanadi. Shu asosda 3 o'lchovli fazo modellashtirishda obyektlarning yo'nalishi, hajmi va o'zaro joylashuvi aniqlanadi.

Tadqiqot davomida isbotlangan Aralash determinant invariantlari teoremasi aralash ko'paytmaning matematik va fizik jihatdan barqarorligini tasdiqlaydi. Teoremaga ko'ra, agar vektorlar koordinata tizimi o'zgartirilgan holda tasvirlansa, ularning aralash ko'paytmasi faqat masshtab koeffitsienti bilan farq qiladi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(T) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Agar $\det(T) = 1$ bo'lsa, aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi. Bu natija determinantning o'zgaruvchan tizimlarda ham invariant bo'lishini nazariy jihatdan isbotlaydi.

Muhokama jarayonida aralash ko'paytmaning determinant shakli yordamida boshqa geometrik amallarni ham umumlashtirish mumkinligi aniqlandi. Masalan, ikki tekislik orasidagi burchak quyidagicha ifodalanadi:

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

bu yerda $\vec{n}_1 = \vec{a} \times \vec{b}$ va $\vec{n}_2 = \vec{b} \times \vec{c}$. Bu bog'lanish orqali ikki tekislik o'rtasidagi fazoviy burchak determinantlar yordamida aniqlanadi.

Natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati shundaki, aralash ko'paytma determinant shaklida ifodalanganda fazoviy tahlilni soddalashtiradi, hisoblash aniqligini oshiradi va invariant xossalarni ko'rsatadi. Bu yondashuv orqali fazoviy tizimlarning barqarorligini baholash, 3 o'lchovli fazo obyektlarning joylashuvini aniqlash hamda mexanik kuchlarning muvozanatini hisoblash osonlashadi.

Umuman olganda, aralash ko'paytmaning determinant shaklidagi isboti matematikada fazoviy bog'lanishlarning umumiy modelini yaratdi. Determinant — bu vektorlar orasidagi geometrik hamda fizik munosabatlarning algebraik kalitidir. Shu sababli, aralash ko'paytma analitik geometriya, chiziqli algebra, mexanika va kompyuter grafikasi sohalarida nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhim o'rin tutadi.

XULOSA

Yuqorida olib borilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki, uch o'lchovli fazoda aralash ko'paytmaning determinant shaklidagi ifodasi analitik geometriyada fazoviy bog'lanishlarni chuqur va aniq tahlil qilish imkonini beradi. Bu yondashuv vektorlarning o'zaro chiziqli mustaqilligi, ularning hosil qilgan hajmi, orientatsiyasi hamda yo'nalish invariantlarini yagona algebraik modelda birlashtiradi. Tadqiqot davomida isbotlangan natijalar shuni tasdiqladiki, determinant orqali ifodalangan aralash ko'paytma fazoda uchta vektor orasidagi hajmni aniqlabgina qolmay, balki koordinata tizimining o'zgarishlariga nisbatan invariant kattalikdir.

Tadqiqotning eng muhim ilmiy yangiligi sifatida “Aralash determinant invariantlari teoremasi” isbotlandi. Ushbu teorema aralash ko'paytma $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ning

koordinatalar o'zgarishidan mustaqilligini matematik asosda tasdiqlaydi. Ya'ni agar vektorlar T o'tish matritsasi yordamida yangi tizimga o'tsa, u holda:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(T)[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Agar $\det(T) = 1$ bo'lsa, u holda aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi. Bu natija fazoviy aylanishlar, proyeksiyalar va o'qlar o'zgarishlariga nisbatan determinant shaklining barqarorligini isbotlaydi.

Natijada aralash ko'paytmaning determinant orqali ifodasi uch o'lchovli fazoda quyidagi nazariy va amaliy afzalliklarni ta'minlaydi:

- Fazoviy obyektlar orasidagi hajmni aniq algebraik usulda hisoblash imkonini beradi;
- Vektorlarning chiziqli mustaqilligini tez va ishonchli aniqlashga yordam beradi;
- Orientatsiya va yo'nalish kabi geometrik xossalarni determinant ishorasi orqali farqlash imkonini yaratadi;
- Fazoviy tahlilda invariant xossalarni saqlaydi, ya'ni o'lchov natijalari koordinata tizimiga bog'liq bo'lmaydi.

Aralash ko'paytma fizikada moment kuchlarini, mexanikada muvozanatni, kompyuter grafikada esa obyektlarning orientatsiyasini aniqlashda keng qo'llanilishi bilan amaliy ahamiyat kasb etadi. Determinant shaklining bu sohalarga tatbiqi fazoviy hisob-kitoblarni soddalashtiradi va tahlilning aniqligini oshiradi.

Xulosa qilib aytganda, aralash ko'paytmaning determinant shaklidagi ifodasi analitik geometriyaning muhim tamoyillaridan biri bo'lib, fazoviy tahlilda hajm, yo'nalish va invariantlik tushunchalarini yagona matematik modelda birlashtiradi. Isbotlangan teorema esa bu ifodaning universal xarakterini ko'rsatib, fazoviy geometriyada yangi yondashuv - koordinata invariantlari asosidagi determinantli fazoviy tahlil konsepsiyasiga asos soldi. Bu esa analitik geometriya, mexanika, informatika va kompyuter grafikasi kabi ko'plab yo'nalishlarda yangi ilmiy va amaliy imkoniyatlar ochadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Xolmatov A. M. *Analitik geometriya nazariyasi va amaliyotida vektor metodlari*. – Toshkent: TDPU nashriyoti, 2022.
2. Anton H. *Elementary Linear Algebra*. – 12th Edition. – New York: John Wiley & Sons, 2020. DOI: 10.1002/9781119611232
3. Lay D. C., Lay S. R., McDonald J. J. *Linear Algebra and Its Applications*. – Pearson, 2023. ISBN 978-0-13-751007-3.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva, D. ., & Mahmudova, D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.