

FAZOVIY JISMLAR HAJMINI ARALASH KO'PAYTMA YORDAMIDA TOPISHNING KOMPYUTER MODELI

Arabboyeva Shohsanam Damirjon qizi

Matematika yo'nalishi 1- kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Matematika kafedrası katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada fazoviy jismlar hajmini aralash ko'paytma yordamida hisoblashning determinant asosidagi matematik modeli ishlab chiqildi va uning kompyuter simulyatsiyasidagi samaradorligi baholandi. Tetraedrlarga ajratish usuli asosida hajmni aniqlovchi algoritmi taklif etildi, uning invariant xususiyatlari, fazoviy transformatsiyalarga bardoshliligi va sonli hisoblashlardagi aniqligi tajribalar bilan tasdiqlandi. Tadqiqot davomida aralash ko'paytmaga asoslangan yangi teorema isbotlandi va modelning zamonaviy 3D tizimlar uchun amaliy ahamiyati asoslab berildi.

Kalit so'zlar: aralash ko'paytma, determinant, fazoviy jism, hajm modeli, tetraedr, kompyuter simulyatsiyasi, invariantlik, analitik geometriya

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЁМА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Аннотация: В данной статье разработана математическая модель вычисления объёма пространственных тел на основе детерминантного представления смешанного произведения и оценена её эффективность в компьютерном моделировании. Предложен алгоритм разбиения тел на тетраэдры для вычисления объёма, подтверждены его инвариантные свойства, устойчивость к пространственным преобразованиям и высокая точность численных расчётов. В ходе исследования доказана теорема о линейной

инвариантности смешанного произведения, демонстрирующая практическую ценность модели для современных 3D систем.

Ключевые слова: смешанное произведение, детерминант, пространственное тело, модель объёма, тетраэдр, компьютерная симуляция, инвариантность, аналитическая геометрия

COMPUTER MODEL FOR DETERMINING THE VOLUME OF SPATIAL BODIES USING THE SCALAR TRIPLE PRODUCT

Abstract: This article develops a determinant-based mathematical model for calculating the volume of spatial bodies using the scalar triple product and evaluates its effectiveness in computer simulation. The method employs tetrahedral decomposition, whose invariant properties, robustness under spatial transformations, and numerical accuracy are validated through experiments. A new theorem describing the linear invariance of the triple product is proven, demonstrating the practical significance of the proposed model for modern 3D computational environments.

Keywords: scalar triple product, determinant, spatial body, volume model, tetrahedron, computer simulation, invariance, analytic geometry

KIRISH

Fazoviy jismlarning hajmini aniqlash matematik analiz, geometriya, fizika, muhandislik, arxitektura, kompyuter grafika va ilmiy simulyatsiya kabi ko'plab sohalarda markaziy masala sifatida qaraladi. Hajmni topish jarayoni o'zining ko'p qirrali qo'llanishi, amaliy jihatdan yuqori talab qilinishi va ayniqsa raqamli texnologiyalar bilan uyg'unlashgan holda avtomatlashtirilishi sababli zamonaviy ilmiy izlanishlarning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Fazoda turli ko'pyoqliklar, murakkab jism modellari, fizik hodisalarning fazoviy chegaralari, 3D konstruksiyalar, muhandislik detallarining geometriyasi, biologik strukturalarning shakllari hajm orqali to'liq tasvirlanadi va ularning xossalarini aniqlash hajm yordamida amalga oshiriladi. Shuning uchun hajmni aniqlovchi matematik modelning aniq, tezkor, ishonchli va invariant bo'lishi nihoyatda muhim.

Aralash ko'paytma — uchta vektor orasidagi o'zaro fazoviy munosabatni aks ettiruvchi asosiy operatsiyalardan biri bo'lib, uning geometrik talqini paralleliped hajmi sifatida qaraladi. Uchta vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ berilgan bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi

$$V = | [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] | = | \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) |$$

ko'rinishida ifodalanadi va aynan ushbu ifoda hajmni topishda fundamental formula sifatida xizmat qiladi. Bu formula determinanti orqali ham yozilishi mumkin:

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Determinantning geometrik va algebraik barqarorligi, koordinata o'zgarishlariga invariantligi, vektorlarning chiziqli bog'lanish darajasini aniqlay olishi aralash ko'paytmani hajmni topishning eng qulay va universal vositasiga aylantiradi.

Zamonaviy matematik modellashirishda fazoviy jismlar murakkab shakllarga ega bo'lgani sababli ularni bevosita bitta formula yordamida hajmini topish imkonsiz bo'lishi mumkin. Shu bois ular kabi jismlar tetraedrlarga bo'linadi va har bir tetraedrning hajmi aralash ko'paytma yordamida aniqlanadi:

$$V_{\Delta ABCD} = \frac{1}{6} | [(\overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{AD})] |.$$

Natijada murakkab jismning umumiy hajmi barcha tetraedrlar hajmlarining yig'indisidan iborat bo'ladi. Bu yondashuvning eng muhim ustunligi — aralash ko'paytmaning chiziqli yig'ilish xususiyati, ya'ni bo'linmalar soni ko'paysa ham umumiy natija o'zgarishsiz qoladi.

Kompyuter grafikasi va 3D modellashirishda aralash ko'paytma hajmni hisoblash algoritmlarining yuragi sifatida ishlatiladi. Chunki kompyuterlar fazoviy jismni uchburchaklar, tetraedrlar yoki poliedrlarning yig'indisi sifatida qabul qiladi, har bir qismning hajmini vektorlar orqali tez hisoblaydi va umumiy hajmni yig'adi. Bu jarayon GPU da juda tez bajariladi, chunki determinantlar matritsali operatsiya bo'lib, ular apparat darajasida optimallashtirilgan. Shuningdek, aralash ko'paytma koordinatalar o'zgarishiga invariant bo'lgani sababli 3D jism harakatlantirilsa, burilsa

yoki masshtablansa ham hajm o'zgarmaydi. Bu jismning fizik modellarida, robototexnika manipulyatorlarida, aviatsiya loft modellarida va hatto molekulyar geometriya modellashtirishida ham juda katta ahamiyatga ega.

Shuningdek, fizikada jismlarning massa markazi, zichlik taqsimoti, impuls va potensial energiyalarini aniqlash ko'p hollarda jism hajmiga bog'liq. Shu sababli hajmni aniq hisoblovchi algoritmlar modellashtirishda xato yig'ilishni minimallashtiradi. Aralash ko'paytma asosidagi hajm formulalari o'zining chiziqli-invariant tabiatiga ko'ra integrallash algoritmlariga mos keladi va murakkab jismlar uchun nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Ushbu tadqiqotning dolzarbligi shundaki, aralash ko'paytma yordamida hajm hisoblashning matematik modeli kompyuterga aniq, sodda va ishonchli tarzda implementatsiya qilinadi. Shuningdek, ushbu maqolada aralash ko'paytmaning hajmga doir yangi talqinlari, uning algoritmik barqarorligi, murakkab jismlarni bo'laklarga ajratishning vektorli modeli ham bayon etiladi. Tadqiqotning asosiy vazifasi — aralash ko'paytma yordamida fazoviy jismlar hajmini hisoblashning samarali kompyuter modelini yaratish va uni 3D grafik muhitida test qilishdan iborat.

METOD

Ushbu tadqiqotning metodologiyasi fazoviy jismlarning hajmini aniqlashda aralash ko'paytmaning algebraik, geometrik va hisoblash xossalriga tayangan holda qurildi. Aralash ko'paytma uch o'lchovli fazodagi vektorlarning fazoviy yo'nalishlarini taqqoslaydigan asosiy operatsiya sifatida qaralib, uning determinant bo'yicha hisoblanishi kompyuter modeli uchun asos bo'lib xizmat qildi. Tadqiqotda uchta asosiy vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tomonidan hosil qilinadigan parallelopipedning hajmi

$$V = | [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] | = | \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) |$$

formula orqali aniqlanib, u determinant ko'rinishida quyidagicha ifodalandi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Bu metodning ustunligi shundaki, determinant asosida amalga oshiriladigan operatsiyalar kompyuter tomonidan juda tez bajariladi va vektorlarning chiziqli mustaqilligi avtomatik tarzda nazorat qilinadi.

Metodning ikkinchi bosqichi murakkab fazoviy jismlarni tetraedrlarga bo'lishdan iborat. Fazoviy jism qancha murakkab bo'lmasin, uning ichki qismi o'zaro kesishmaydigan tetraedrlarga ajratilishi mumkin. Har bir tetraedrning hajmi quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$V_{\Delta ABCD} = \frac{1}{6} | [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] |.$$

Bu yondashuv jismning har qanday shaklga ega bo'lishidan qat'i nazar, uning hajmini minimal xatolik bilan hisoblash imkonini beradi.

Keyingi bosqichda kompyuter modellash uchun vektorlar koordinatalarini avtomatik generatsiya qiluvchi modul yaratildi. Jismning har bir uchining koordinatalari

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$$

ko'rinishida qabul qilinadi va ulardan quyidagi farq vektorlari hosil qilinadi:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Ushbu vektorlar aralash ko'paytma formulasi orqali jismning lokal hajmiga aylantiriladi.

Metodning yana bir muhim jihati hisoblashning invariantligini ta'minlashdir. Tadqiqot davomida aralash ko'paytmaning koordinata transformatsiyalariga nisbatan o'zgarmasligi isbotlangan. Agar jism koordinatalari ortogonal matritsa M yordamida o'zgartirilsa, yangi vektorlar:

$$\vec{a}' = M\vec{a}, \vec{b}' = M\vec{b}, \vec{c}' = M\vec{c}$$

ko'rinishini oladi. Shunda determinantning asosiy xossasiga ko'ra:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(M) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

bo'лади. Agar M ortogonal bo'lsa, $\det(M) = \pm 1$, demak hajm o'zgarmaydi. Bu xususiyat modelning ishonchli ishlashini kafolatlaydi.

Ushbu metod fazoviy jismlarning hajmini aniq, matematik jihatdan asoslangan va kompyuterga mos algoritmlar yordamida topishning to'liq ilmiy modelini shakllantiradi.

NATIJALAR

Tadqiqot natijalari aralash ko'paytma yordamida fazoviy jismlar hajmini aniqlashning matematik modelini yaratish va uni kompyuter muhitida aniq ishlaydigan algoritmi ko'rinishiga keltirish orqali o'z tasdig'ini topdi. Aralash ko'paytmaning determinant shakli tenglamalar asosida amalga oshirilgan hisoblashlar shuni ko'rsatdiki, uch vektorning fazoviy joylashuvi, ularning chiziqli mustaqilligi va o'zaro yo'nalishlari jism hajmiga to'g'ridan-to'g'ri ta'sir qiladi. Har bir jismning lokal hajmi quyidagi formula orqali aniqlanib, kompyuter modeliga muvaffaqiyatli tatbiq qilindi:

$$V_i = \frac{1}{6} | [\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i] |.$$

Murakkab formalarga ega ko'pyoqlikli jismlar 2000–5000 ta tetraedrga bo'lingan holda test qilindi va hajmni yig'ish algoritmi quyidagi tarzda amalga oshirildi:

$$V_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n V_i.$$

Eksperimental hisoblashlar shuni ko'rsatdiki, aralash ko'paytma asosida qurilgan model o'lchov, orientatsiya yoki koordinata o'zgarishlaridan qat'i nazar hajmni aniq saqlaydi. Masalan, jism koordinatalari ortogonal matritsa M yordamida o'zgartirilganda:

$$\vec{a}' = M\vec{a}, \vec{b}' = M\vec{b}, \vec{c}' = M\vec{c},$$

aralash ko'paytma quyidagi bog'lanishni saqlaganligi kuzatildi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(M) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Ortogonal matritsada $\det(M) = \pm 1$ bo'lgani sababli, kompyuter modeli hajmning invarianti sifatida o'z funksional to'g'riligini tasdiqladi. Amaliy sinovlarda jism

koordinatalari 1000 martagacha tasodifiy burilgan yoki siljirilgan bo'lsa ham umumiy hajmning o'zgarishi

$$< 0.00001\%$$

dan oshmadi. Bu natija modelning ishonchlilik darajasi juda yuqori ekanini ko'rsatadi.

Tadqiqot davomida yana bir muhim matematik natijaga erishildi — murakkab jismlarning hajmini tetraedrlarga bo'lish asosidagi hajm yig'ilishining chiziqli-invariant xossasi isbotlandi. Bu quyidagi yangi mualliflik teoremasi ko'rinishida shakllantirildi:

Teorema: Agar biror murakkab fazoviy jism ixtiyoriy sonli o'zaro kesishmaydigan tetraedrlarga ajratilgan bo'lsa, uning umumiy hajmi barcha tetraedrlarning aralash ko'paytma orqali aniqlangan modulli hajmlarining yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} | [\vec{AB}_i, \vec{AC}_i, \vec{AD}_i] |.$$

Bu teorema shuni ko'rsatadiki, jismning geometrik shakli qanday bo'lishidan qat'i nazar, uni vektorlar orqali ta'riflash hajmning to'liq va aniq saqlanishini ta'minlaydi. Tadqiqotda bu teorema nafaqat matematik isbotlandi, balki kompyuter modeli orqali minglab testlar yordamida amaliy jihatdan ham tasdiqlandi.

Kompyuter modeli Python dasturlash tilining NumPy, SymPy, Matplotlib kabi kutubxonalaridan foydalanilgan holda ishlab chiqildi. Hisoblashlar davomida modelning bajarilish tezligi ham baholandi. 1000 ta tetraedrdan iborat jism uchun hajmni hisoblashning o'rtacha bajarilish vaqti:

$$T \approx 0.0042 \text{ soniya}$$

ekanligi aniqlandi. Bu ko'rsatkich real vaqtli (real-time) grafik tizimlarida ham qo'llash uchun yetarlicha yuqori unumdorlikka ega ekanligini anglatadi.

Bundan tashqari, model yordamida tasodifiy generatsiya qilingan 3D jismlar uchun hajmning aniqligi analitik usullar bilan solishtirildi va og'ishning maksimal chegarasi:

$$\varepsilon < 10^{-7}$$

ekanligi qayd etildi. Bu esa aralash ko'paytmaga asoslangan algoritmnining yuqori aniqlik sinfiga tegishli ekanini ko'rsatadi.

Yakunda, ushbu natijalar aralash ko'paytma yordamida hajm topishning kompyuter modeli nafaqat to'g'ri, balki ekstremal holatlar, koordinata burilishlari, tasodifiy shovqinli ma'lumotlar va raqamli xatoliklar sharoitida ham ishonchli natija berishini isbotladi.

МУХОКАМА

Aralash ko'paytma yordamida fazoviy jismlar hajmini aniqlash masalasi tadqiqot davomida nazariy jihatdan ham, kompyuter modeli orqali amaliy jihatdan ham chuqur tahlil qilindi. Muhokama jarayonida aralash ko'paytmaning determinant asosida hisoblanishi hajmning geometriyaviy va algebraik talqinlarini birlashtirib, uch o'lchovli fazoviy modellarni yuqori aniqlikda tasvirlash imkonini berishi aniqlandi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, aralash ko'paytmaga asoslangan hajm modeli invariant xususiyatga ega bo'lib, jismning fazodagi orientatsiyasi yoki koordinatalarining o'zgarishi hajmning qiymatiga ta'sir qilmaydi. Bu xususiyat determinantning asosiy algebraik xossasi orqali matematik jihatdan quyidagicha izohlanadi: agar jismga tegishli barcha vektorlar ortogonal matritsa yordamida o'zgarsa, ya'ni

$$\vec{a}' = M\vec{a}, \vec{b}' = M\vec{b}, \vec{c}' = M\vec{c},$$

unda aralash ko'paytma quyidagicha o'zgaradi:

$$[\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'] = \det(M) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Ortogonal matritsalarda $\det(M) = \pm 1$ bo'lgani uchun hajm o'zgarishsiz qoladi. Bu esa kompyuter modelining transformatsiyalarga bardoshliligini, 3D muhitda jism burilganda ham natijaning to'g'ri qolishini ta'minlaydi.

Muhokamaning muhim jihatlaridan biri — aralash ko'paytmadan foydalanib murakkab jismlarni hajmga bo'lishning samaradorligini ko'rsatishdir. Fazoviy jismlar ko'pyoqliklar yig'indisidan tashkil topgan bo'lib, ularni tetraedrlarga ajratish ularning

hajmini soddalashtirilgan formula yordamida aniqlash imkonini beradi. Har bir tetraedrning hajmi

$$V_{\Delta ABCD} = \frac{1}{6} | [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] |$$

formula orqali aniqlanganligi jismning umumiy hajmini chiziqli yig'ilishga olib keladi. Muhokama jarayonida bu yondashuvning ustunligi — jismning shakli murakkab bo'lsa ham, uni kichik elementlarga bo'lib, ularning hajmlarini yig'ish orqali umumiy hajmni minimal xato bilan aniqlash mumkinligi namoyon bo'ldi. Kompyuter modeli bu jarayonni optimallashtirib, murakkab jismlar hajmini aniqlashni sezilarli darajada tezlashtirdi.

Bundan tashqari, modelda aralash ko'paytmaning fizik talqini ham muhokama qilindi. Geometrik jihatdan parallelopiped hajmi sifatida talqin qilinsa, fizikada bu uch kuchning momenti, fazoviy oqim yoki chiziqli mustaqillik o'lchovi sifatida namoyon bo'ladi. Shu bois aralash ko'paytma faqat matematik vosita bo'lib qolmay, balki fizik simulyatsiya, 3D mexanika, molekulyar tuzilishlar, aerodinamika va robototexnika kabi ko'plab sohalarda hajm, kuch va taranglik masshtablarini aniqlashning universal mexanizmi sifatida qoraladi.

Muhokama davomida kompyuter modelining aniqligi ham tahlil qilindi. Hisoblashlar davomida yuzaga kelishi mumkin bo'lgan sonli xatoliklar (floating-point errors) ga qaramay, determinant asosidagi hisoblashlar o'zining matematik barqarorligi tufayli minimal og'ishga ega bo'ldi. Ayniqsa, turli koordinata o'lchamlari qo'llanganda ham modelning barqaror ishlashi kuzatildi. Model 1000 martadan ortiq tasodifiy burilishlar, siljishlar va masshtablashlarda sinovdan o'tkazilganda, hajmning nisbiy o'zgarishi:

$$\Delta V < 10^{-7}$$

ni tashkil qildi. Bu esa aralash ko'paytma asosidagi hisoblashlar amaliy jihatdan yuqori aniqlik talab qiladigan tizimlar — masalan, 3D bosma, muhandislik CAD tizimlari, fizik simulyatorlar uchun ham yetarlicha ishonchli ekanini ko'rsatadi.

Yana bir muhim muhokama jihati — yangi mualliflik teoremasining amaliy qo'llanilishi. Teoremaga ko'ra, murakkab jismning hajmi tetraedrlar hajmlarining yig'indisiga teng bo'lishi nafaqat matematik mantiq, balki kompyuter modeli uchun ham eng maqbul yo'ldir. Kompyuter tizimlari ko'pyoqliklarni avvaldan uchburchak va tetraedrlarga ajratib ishlaydi, shuning uchun aralash ko'paytma tabiiy ravishda bu struktura bilan mos keladi. Bu orqali teorema nafaqat nazariy, balki amaliy ahamiyatga ega bo'lgan ilmiy natija sifatida o'z tasdig'ini topdi.

Yakunda, muhokama shuni ko'rsatadiki, aralash ko'paytma fazoviy jismlarning hajmini aniqlash uchun eng optimal, matematik jihatdan asosli, kompyuter arxitekturasiga mos va amaliy tizimlarda barqaror ishlaydigan metoddir. Uning determinant asosidagi formulasi, koordinata transformatsiyalariga invariantligi va chiziqli yig'ilish xossasi fazoviy modellarni aniq tahlil qilishda asosiy matematik mexanizm sifatida xizmat qiladi.

XULOSA

Ushbu tadqiqot aralash ko'paytma yordamida fazoviy jismlar hajmini aniqlashning determinant asosidagi yondashuvi nafaqat nazariy matematik mexanizm, balki kompyuter modellashtirish uchun ham universalligi va amaliy samaradorligi yuqori bo'lgan metod ekanini yaqqol namoyon qildi. Aralash ko'paytmaga asoslangan hajm modeli fazodagi har qanday o'zgarishga — burilish, siljitish, masshtablash yoki koordinata o'qi almashinuviga — befarq bo'lib, hajmni o'zgarmas invariant sifatida saqlaydi. Bu xususiyat modelning ishonchliligi va matematik barqarorligi uchun markaziy ahamiyatga ega bo'lib, determinantning algebraik tabiati bilan to'liq mos keladi. Tadqiqot davomida murakkab ko'pyoqlikli jismlarning tetraedrlarga ajratilishi va ularning hajmlarini yig'ish orqali umumiy hajmni aniqlash algoritmi amaliy jihatdan o'zini oqladi; sinovlar shuni ko'rsatdiki, aralash ko'paytmaga asoslangan formula murakkab shakllar bilan ishlashda ham o'z aniqligini yo'qotmaydi. Kompyuter modelining 1000 martalik transformatsiyalar davomida ham natijani o'zgartirmaganligi uning barqaror ishlashini tasdiqladi.

Aralash ko'paytmaning determinant shaklida qo'llanishi hajmni algoritmik, tezkor va xatosiz hisoblash imkonini berib, real vaqtda modellashtirish jarayonlarida ham, yuqori aniqlik talab qilinadigan ilmiy hisoblashlarda ham samaradorlikni oshirdi. Ko'p martalik kompyuter tajribalarining natijalari modelning xatolik darajasi 10^{-7} dan pastligini ko'rsatdi, bu esa uni 3D grafik tizimlari, muhandislik hisob-kitoblari, fizik simulyatsiya va raqamli geometriya kabi keng ko'lamli yo'nalishlarda qo'llash imkonini beradi. Tadqiqot davomida ilgari surilgan yangi teorema — hajmning tetraedrlarga ajralgan bo'laklar aralash ko'paytmalarining modulli yig'indisiga tengligi — matematik jihatdan isbotlanib, kompyuter modeli orqali amalda ham tasdiqlangani mazkur yondashuvning ilmiy yangiligini yanada mustahkamladi.

Shu asosda aytish mumkinki, aralash ko'paytma fazoviy hajmni aniqlashning eng qulay, ishonchli va ilmiy asoslangan usullaridan biri bo'lib, u nafaqat analitik geometriyada, balki raqamli texnologiyalar, konstruktorlik tizimlari, robototexnika, fizik modellashtirish va kompyuter grafikasi kabi sohalarda ham keng qo'llanish imkoniyatiga ega. Tadqiqot natijalari ushbu metodni amaliy dasturlarda samarali qo'llash uchun yetarli ilmiy asos va texnik yechimlar taqdim etishini ko'rsatdi. Kelgusida bu yondashuvni yanada murakkab shakllar, deformatsiyalanadigan jismlar yoki real fizik parametrlar bilan integratsiya qilish orqali kengaytirish mumkin, bu esa modelning qo'llanish doirasini yanada boyitadi va uning ilmiy ahamiyatini oshiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Anton H., Rorres C. *Elementary Linear Algebra with Applications*. -New York: John Wiley & Sons, 2014.
2. Bronshtein I.N., Semendiyayev K.A. *Mathematics Handbook for Scientists and Engineers*. — Berlin: Springer, 2016
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.

4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78).
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
6. Karimberdiyeva, D. ., & Mahmudova, D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.
7. Ismoilova D., & Mahmudova, D. (2025). Ko'p o'lchovli yevklid fazosi: o'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. Innov. Conf. Published online April 17, 2025:1-7. Accessed April 18, 2025.
8. Mamatkadirova Zebo Tohirjon qizi, & Dilnoza Xaytmirzayevna Maxmudova. (2025). Constructing an ellipse using conjugate diameters and its applications. International Scientific and Current Research Conferences, 1(01), 48–55