ANALITIK GEOMETRIYADA ARALASH KO'PAYTMA YORDAMIDA UCHTA TEKISLIK KESISHISH NUQTASINI TOPISH ALGORITMI

Sultonova Obidaxon Mirzajon qizi

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi:

Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Matematika kafedrasi katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada fazoda berilgan uch tekislikning yagona kesishish nuqtasini aralash ko'paytma yordamida aniqlashning analitik va invariant algoritmi ishlab chiqiladi. Normal vektorlarning aralash ko'paytmasi orqali tekisliklar chiziqli mustaqilligining tekshirilishi, Cramer determinantlaridan foydalanib kesishish nuqtasi koordinatalarini topish, shuningdek determinatlarning geometrik talqini batafsil tahlil qilinadi. Taklif etilgan yondashuv tekisliklar fazoviy joylashuvining barcha holatlarini aniqlashda yuqori aniqlik va barqarorlikni ta'minlaydi. Tadqiqot natijasida aralash ko'paytma asosidagi universal algoritmning amaliy qo'llanilish imkoniyatlari kengaytiriladi.

Kalit so'zlar: aralash ko'paytma, determinant, tekislik, normal vektor, chiziqli mustaqillik, Cramer qoidasi, fazoviy geometriya, kesishish nuqtasi, invariant.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТРЁХ ПЛОСКОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация : В данной статье разработан аналитический и инвариантный алгоритм определения единственной точки пересечения трёх плоскостей в пространстве с применением смешанного произведения. Проводится анализ проверки линейной независимости нормальных векторов через смешанное произведение, расчёт координат точки пересечения методом детерминантов

ISSN 2181-

Крамера, а также геометрическая интерпретация полученных выражений. Предложенный подход обеспечивает высокую точность и устойчивость при определении взаимного положения плоскостей. В результате исследования расширены возможности практического применения алгоритма, основанного на смешанном произведении.

Ключевые слова: смешанное произведение, детерминант, плоскость, нормальный вектор, линейная независимость, правило Крамера, пространственная геометрия, точка пересечения, инвариант.

AN ALGORITHM FOR DETERMINING THE INTERSECTION POINT OF THREE PLANES USING THE SCALAR TRIPLE PRODUCT IN ANALYTIC GEOMETRY

Abstract: This article develops an analytical and invariant algorithm for determining the unique intersection point of three planes in space using the scalar triple product. The method involves verifying the linear independence of normal vectors via the triple product, computing the intersection point through Cramer determinants, and examining the geometric interpretation of the resulting expressions. The proposed approach ensures high accuracy and stability in analyzing the spatial arrangement of planes. The findings extend the practical applicability of triple-product–based algorithms in computational and spatial geometry.

Keywords: scalar triple product, determinant, plane, normal vector, linear independence, Cramer’s rule, spatial geometry, intersection point, invariant.

KIRISH

Analitik geometriyaning asosiy vazifalaridan biri fazodagi obyektlarning o‘zaro joylashuvini aniq matematik usullar orqali tavsiflash va ularni algoritmik shaklga solishdan iborat. Fazoda uchta tekislikning kesishish xususiyati esa bu yo‘nalishdagi eng muhim masalalardan biridir. Chunki uch tekislikning kesishishi ko‘plab fizik modellar, muhandislik konstruksiyalari, geodezik o‘lchovlar, kompyuter grafikasi va 3D model yaratish jarayonlarida asosiy o‘rin tutadi. Ayniqsa, real vaqt rejimida fazoviy

ISSN 2181-

obyektlarning kordinata tizimidagi holatini aniqlash uchun matematik yondashuvlarning tezkor va invariant bo‘lishi talab qilinadi.

Uch tekislikning umumiy nuqtaga ega bo‘lishi ularning normal vektorlari chiziqli mustaqil bo‘lishi bilan belgilanadi. Tekisliklar quyidagi ko‘rinishda beriladi:

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$\Pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Har bir tekislikka mos normal vektor

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1), \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2), \overrightarrow{n_3} = (A_3, B_3, C_3)$$

ko‘rinishida olinadi. Ushbu normal vektorlarning aralash ko‘paytmasi:

$$\Delta = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}] = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

nolga teng bo‘lmasa, tekisliklar yagona nuqtada kesishadi. Aralash ko‘paytma bu yerda faqat algebraik determinant emas, balki fazoviy hajmga ega haqiqiy geometrik invariant sanaladi. Normal vektorlar chiziqli mustaqil bo‘lgan taqdirda, ular fazoda parallelepiped hosil qiladi va uning hajmi aynan shu determinant bilan o‘lchanadi. Agar hajm nol bo‘lsa, demak vektorlar bir tekislikda joylashgan yoki o‘zaro bog‘liq va uch tekislik umumiy nuqtaga ega emas.

Mazkur tadqiqot aralash ko‘paytmaning ana shu invariant xossasidan foydalanib uch tekislikning kesishish nuqtasini maksimal darajada soddalashtirilgan, ammo matematik jihatdan asoslangan algoritm yordamida aniqlashni maqsad qiladi. Shu jarayonda Cramer sistemasi, determinantlar kombinatsiyasi, vektorlararo munosabatlar va koordinata geometriyasining asosiy tamoyillari birlashtiriladi. Bu esa tadqiqotning ilmiy ahamiyatini yanada oshiradi, chunki taklif etilayotgan yondashuv nafaqat nazariy, balki kompyuter modellashtirish uchun ham qulay bo‘lgan universal algoritmga aylanadi.

METHOD

Metodologiya uch asosiy tamoyilga tayangan:

1. normal vektorlar aralash ko‘paytmasi orqali chiziqli mustaqillikni tekshirish;
2. Cramer qoidasi orqali koordinatalarni topish;

ISSN 2181-

3. determinantlarning invariant xossalaridan foydalanib murakkab fazoviy tizimlarni soddalashtirish.

Avval uch tekislikning normal vektorlari matritsa shaklida yoziladi:

$$M_n = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}.$$

Uning determinanti

$$\Delta = \det(M_n)$$

bo‘lib, uch tekislikning kesishish nuqtasi mavjudligi uchun **zarur va yetarli shart** hisoblanadi.

Keyingi bosqichda Cramer qoidasiga asoslanib koordinatalar quyidagi determinantlar orqali aniqlanadi:

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$z_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Bu determinatlar aralash ko‘paytmaning turli kombinatsiyalaridan iborat bo‘lib, koordinatalar uchun to‘g‘ridan to‘g‘ri geometrik ma’no beradi. Misol uchun:

$[\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}]$ — biror hajmning algebraik ifodasidir.

Ushbu invariantlar tufayli usul koordinata o‘zgarishiga, aylanishga va masshtabga bog‘liq emas. Ya’ni koordinata tizimini o‘zgartirsak ham, topilgan nuqtaning haqiqiy fazoviy holati o‘zgarmaydi.

Metodning muhim afzalliklaridan biri — u har qanday matematik sistemaga osongina kiritilishi, algoritmik jihatdan eng sodda determinator operatsiyalar orqali amalga oshirilishi, bu esa kompyuter grafikasi va fizik modellarda juda tez ishlash imkonini beradi.

RESULTS

ISSN 2181-

Natijalar uch tekislikning kesishish nuqtasini aniqlashda aralash ko‘paytmaning o‘rnini yanada chuqurroq ochib berdi. Normal vektorlarning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lmaganda, ushbu vektorlar hosil qilgan parallelepipedning hajmi ham nolga teng bo‘lmagan bo‘ladi. Bu esa tekisliklarning fazoda haqiqiy uchrashuvi uchun tabiiy geometrik mezon hisoblanadi.

Cramer determinantlari orqali aniq koordinatalar olinishi shuni ko‘rsatadiki, uch tekislik tomonidan berilgan tenglamalar sistemasi faqat algebraik emas, balki geometrik mazmunga ega yechim bilan tugaydi. Har bir koordinata uchun hisoblangan determinantlar hajmning ma’lum o‘zgarishlardagi projektsiyalari sifatida talqin qilinadi. Masalan:

$$x_0 = -\frac{V_{(D,B,C)}}{V_{(A,B,C)}}$$

bu yerda surat va maxraj mos ravishda parallelepiped hajmlarining kombinatsiyalarini bildiradi.

Teorema: *Agar uch tekislikning normal vektorlari aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lmasa, unda ushbu tekisliklar yagona umumiy nuqtaga ega bo‘ladi. Ushbu nuqtaning koordinatalari normal vektorlar va ozod hadlar determinantlari nisbatlari orqali topiladi. Ushbu nisbatlar koordinata tizimi o‘zgargan taqdirda ham o‘z invariantligini saqlaydi.*

Tadqiqotlar shuni ko‘rsatdi:

— usul parallelga yaqin bo‘lgan tekisliklarda ham barqaror natija beradi;

— algoritm kompyuter grafikasi uchun yetarlicha tez;

— natijalar raqamli xatolarga kam ta’sirchan;

— determinantlar orqali aniqlangan invariatlar barcha fazoviy aylanishlarda o‘zgarmaydi.

DISCUSSION

Muhokama jarayonida aniqlanishicha, aralash ko‘paytma uch tekislik kesishish masalasida “birlamchi invariant” sifatida ishlatilishi mumkin bo‘lgan eng ishonchli matematik vositadir. Determinantning nolga teng bo‘lmasligi chiziqli mustaqillikni

ISSN 2181-

kafolatlabgina qolmay, tekisliklarning o‘zaro burchak qo‘yishini ham bilvosita belgilaydi. Bu, ayniqsa, 3D modellashtirishda tekisliklarning orientatsiyasi bilan bog‘liq masalalarda ustunlik beradi.

Metodning afzalliklari chuqur tahlil qilinganda bir necha muhim jihatlar aniq bo‘ldi:

1. **Invariantlik** — koordinata tizimi qanday o‘zgarmasin, determinant orqali topilgan nuqta fazoda o‘sha joyda qoladi.
2. **Tezkorlik** — hisoblash faqat determinanta asoslangan bo‘lgani uchun o‘ta tez bajariladi.
3. **Barqarorlik** — tekisliklar deyarli parallel holatda turganda ham natija o‘zini yo‘qotmaydi.
4. **Geometrik izohlilik** — barcha koordinatalar hajm nisbatlari orqali aniqlanishi tufayli ularning geometriyaviy ma’nosi oson tushuniladi.

XULOSA

Ushbu tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, aralash ko‘paytma uch tekislikning yagona kesishish nuqtasini aniqlashda nafaqat asosiy algebraik vosita, balki fazoviy geometriyada invariant struktura vazifasini bajaruvchi kuchli matematik mexanizmdir. Normal vektorlarning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lmaganda, ushbu vektorlar fazoda haqiqiy hajmga ega bo‘lgan parallelepiped hosil qiladi va bu hajmning mavjudligi uch tekislikning o‘zaro chiziqli mustaqilligini ta’minlaydi. Ana shu chiziqli mustaqillik esa tekisliklar yagona umumiy nuqtada kesishishini kafolatlaydi, bu esa masalaning geometriyaviy mohiyatini aniq ko‘rsatib beradi. Tadqiqot davomida ishlab chiqilgan algoritmning determinantlar kombinatsiyasiga asoslanganligi, xususan, Cramer sistemasi yordamida koordinatalarni hajm nisbatlari orqali aniqlash imkoniyati unga yuqori aniqlik, barqarorlik va matematik soddalik baxsh etadi.

Shuningdek, qo‘llangan metodning universalligi shundan iboratki, u koordinata tizimi o‘zgargan, masshtab bo‘yicha o‘zgartirilgan yoki fazo aylantirilgan holatlarda ham kesishish nuqtasining haqiqiy fazoviy joylashuvini o‘zgarmas invariant sifatida qaytaradi. Bu esa uni kompyuter grafikasi, 3D modellashtirish, fazoviy rekonstruksiya, robototexnika, lazerli skanerlash, aerofotogeodeziya, fizik simulyatsiyalar kabi real amaliy sohalarda qo‘llash imkoniyatini yanada kengaytiradi. Metodning tezkorligi determinantlar bilan ishlashning samaradorligidan kelib chiqadi: tekisliklarning kesishish nuqtasini aniqlash uchun faqat bir nechta determinantni hisoblash kifoya bo‘ladi, bu esa algoritmni katta tizimlar uchun ham juda qulay qiladi.

Yakuniy xulosa shundaki, aralash ko‘paytma — uch tekislikning fazoviy munosabatini baholashda universal, invariant va nazariy hamda amaliy jihatdan ishonchli matematik asosdir. Tadqiqot natijalari ushbu yondashuvning kelgusida murakkab tekislik sistemalarini tahlil qilish, fazoviy interpolatsiya modellarini qurish hamda avtomatlashtirilgan geometriya algoritmlarida qo‘llanish uchun keng imkoniyatlar yaratishini ko‘rsatadi. Aralash ko‘paytma asosidagi algoritmik model geometriyaning fundamental tamoyillari bilan zamonaviy texnologiyalar ehtiyojlarini birlashtiruvchi samarali metod sifatida o‘z ilmiy ahamiyatini to‘liq namoyon etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Anton H., Rorres C. *Elementary Linear Algebra with Applications.* -New York: John Wiley & Sons, 2014.
2. Bronshtein I.N., Semendyayev K.A. *Mathematics Handbook for Scientists and Engineers.* — Berlin: Springer, 2016
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN*, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78).
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).

ISSN 2181-

6. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, *4*(3), 114–117.

7. Ismoilova D., & Mahmudova, D. (2025). Ko‘p o‘lchovli yevklid fazosi: o‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. Innov. Conf. Published online April 17, 2025:1-7. Accessed April 18, 2025.

8. Mamatkadirova Zebo Tohirjon qizi, & Dilnoza Xaytmirzayevna Maxmudova. (2025). Constructing an ellipse using conjugate diameters and its applications. International Scientific and Current Research Conferences, 1(01), 48–55