ISSN 2181-

ANIQ INTEGRALNING FIZIK VA MEXANIK TATBIQLARI

TOSHKENT DAVLAT
IQTISODIYOT UNIVERSITETI
INTERNATIONAL
BUSINESS AKADEMIK LITSEYI O'QITUVCHISI
ABDUFAYOZOV JAHONGIR FAXRIDDIN O'G'LI

Kattaligi o'zgaruvchan va $f(x)$ funksiya bilan aniqlanadigan kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo'yicha harakatlantirganda bajarilgan A ish

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

formula bilan hisoblanadi.

Biror o'zgarmas tezlik bilan to'gri chiziq bo'ylab tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan S masofasi $S = v(b-a)$ formula bilan hisoblanadi.

Tezligi har bir t vaqtda o'zgaruvchan va $v = v(t)$ funksiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan s masofasi

$$S = \int_a^b v(t)\,dt$$

formula bilan aniqlanadi.

Ma'lumki, inersiya momenti tushunchasi mexanikaning muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Tekislikda m massaga ega bo'lgan A moddiy nuqta berilgan bo'lib, bu nuqtadan biror l o'qqacha (yoki O nuqtagacha) bo'lgan masofa r ga teng bo'lsin. U holda $J = mr^2$ miqdor A moddiy nuqtaning l o'qga (O nuqtaga) nisbatan inersiya momenti deb ataladi.

Masalan, tekislikdagi m massaga ega bo'lgan $A = A(x,y)$ moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x = mx^2, \qquad J_y = my^2, \qquad J_0 = m(x^2 + y^2)$$

ISSN 2181-

formulalar orqali hisoblanadi.

Masalan, tekislikda har biri mos ravishda $m_0, m_{1,} \ldots, m_{n-1}$ massaga ega bo‘lgan $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, …, $A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ moddiy nuqtalar sistemasining koordinata o‘qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x^{(n)} = \sum_{k=o}^{n-1} m_k x_k^2, \quad J_y^{(n)} = \sum_{k=o}^{n-1} m_k y_k^2, \quad J_0^{(n)} = \sum_{k=o}^{n-1} m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

formulalar orqali ifodalanadi.

Biror $y = f(x)$ egri chiziq yoyi bo‘yicha massa tarqatilgan bo‘lsin. Bu massali egri chiziq yoyining koordinata o‘qlari hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari

$$J_x = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \qquad J_y = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

formulalar orqali ifodalanadi.

Oxy tekislikda massalari $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bo‘lgan $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ material nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsa, u holda, $x_i m_i$ va $y_i m_i$ ko‘paytmalar m_i massaning ox va oy o‘qlariga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Berilgan sistemaning og’irlik markazi koordinatalarini x_c va y_c lar bilan belgilaymiz. U holda, mexanika kursidan ma’lum bo‘lgan

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

formulalarni yozishimiz mumkin.

$y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ tenglama bilan berilgan AB egri chiziq yoyining og’irlik markazi koordinatalari quyidagi integrallar bilan aniqlanadi :

ISSN 2181-

$$x_c=\frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f(x)\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

$y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ x=a,\ x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura og'irlik markazining koordinatalari

$$x_c=\frac{\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx},\qquad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx}$$

formulalardan topiladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. Vintsimon prujinaning bir uchi mustakamlangan, ikkinchi uchiga esa $F=F(x)$ kuch ta'sir etib prujinani qismoqda. Agar prujinaning qisilishi unga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchga proporsional bo'lsa, prujinani a birlikka qisish uchun $F(x)$ kuchni bajargan ishini toping.

Yechish: Agar $F(x)$ kuch ta'sirida prujinaning qisilish miqdorini x deb olsak, u holda $F(x)=kx$ bo'ladi. Bunda $k-$ proporsionallik koeffitsienti (qisilish koeffitsienti). Bajarilgan ishni topish formulasidan foydalanamiz:

$$A=\int_0^a kxdx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{k\cdot a^2}{2}$$

2. Tezligi $v(t)=t^2+3t$ qonun bo'yicha o'zgaradigan notekis harakatda $[3;8]$ vaqt oralig'ida bosib o'tilgan S masofa topilsin.

Yechish: $S=\int_a^b v(t)dt$ formuladan foydalanamiz. Demak,

$$S=\int_3^8(3t+t^2)dt=3\int_3^8 tdt+\int_3^8 t^2dt=\frac{3t^2}{2}\Big|_3^8+\frac{t^3}{3}\Big|_3^8=\frac{3\cdot 64}{2}-\frac{3\cdot 9}{2}+$$

$$+\frac{8^3}{3}-\frac{3^3}{3}=96-\frac{27}{2}+\frac{512}{3}-\frac{27}{3}=87+\frac{1024-81}{6}=87+\frac{943}{6}=244\frac{1}{6}$$

ISSN 2181-

3. Ox o‘qining yuqorisida joylashgan $x^2 + y^2 = a^2$ yarim aylana og’irlik markazining koordinatalari topilsin.

Yechish: Og’irlik markazining ordinatasini topamiz.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \quad ds = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

$$y_c = \frac{\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a} = \frac{a\int_{-a}^{a} dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

$x_c = 0$ bo'ladi. Chunki yarim aylana oy o‘qqa nisbatan simmetrik joylashgan.

4. $y^2 = ax$ parabolaning $x = a$ to‘g’ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan segmentning og’irlik markazi koordinatalari topilsin.

Yechish: Masalaning shartidan $f_2(x) = \sqrt{ax}$ va $f_1(x) = -\sqrt{ax}$. Shuning uchun

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}dx} = \frac{2\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}dx} = \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a} = \frac{3}{5}a.$$

Segment ox o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun $y_c = 0$ bo‘ladi.

5. Asosi b ga va balandligi h ga teng bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchakning asosiga nisbatan inersiya momenti topilsin.

Yechish: To‘g’ri to‘rtburchakda uning asosidan y masofada joylashgan va kengligi dy bo‘lgan elementar polosa ajratamiz. Bu polosaning massasi shu polosaning yuziga, ya’ni $ds = bdy$ ga teng.

Bundan tashqari,

$$dJ_x = by^2dy \;\; va \;\; J_x = \int_0^h by^2dy = \frac{bh^3}{3}$$