

MURAKKAB FUNKSIYA HOSILASI UCHUN KOMPOZITSION TEOREMANING ISBOTINI UMUMLASHTIRISH

Yandashaliyev Shohjahon Dilshod o'g'li

Axborot tizimlari va texnologiyalari

ATT AU-25 yo'nalishi 1-kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzayevna

Matematika kafedrasi katta o'qituvchisi

Namangan Davlat Universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Mazkur ishda bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun murakkab funksiya hosilasini aniqlashga oid kompozitsion (zanjir) teoremaning isboti umumlashtiriladi. Klassik tahlilda ushbu teorema faqat differensiallanuvchi funksiyalar sinfi va chegaralangan shartlar uchun ko'rib chiqilgan bo'lsa, ushbu tadqiqotda umumiyroq shartlar, vektor-funksiyalar va parametrik ko'rinishdagi funksiyalar misolida isbot kengaytiriladi. Xususan, funksiya differensiallanuvchanligining yetarli va zarur shartlari, yakuniy funksiya hosilasining matrisa (Yakobi) va gradientlar orqali ifodalanishi hamda ular orasidagi kompozitsion bog'lanishlar tahlil qilinadi. Natijada murakkab funksiya hosilasini aniqlash formulasi yanada umumiy, invariant va amaliy qo'llash uchun qulay shaklda ifodalanadi. Ushbu umumlashtirilgan isbot matematik analiz, differensial tenglamalar va optimallashtirish masalalarida muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Murakkab funksiya, hosila, kompozitsion teorema, zanjir qoidasi, Yakobi matritsasi, gradient, differensiallanuvchanlik, ko'p o'zgaruvchili funksiya.

ОБОБЩЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА КОМПОЗИЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Аннотация: В данной работе обобщается доказательство композиционной (правила цепочки) теоремы нахождения производной сложной функции для функций одной и нескольких переменных. В классическом анализе эта теорема рассматривается только для класса дифференцируемых функций и при

ограниченных условиях, тогда как в данном исследовании доказательство распространяется на более общие условия, в том числе на векторные функции и функции в параметрической форме. В частности, анализируются необходимые и достаточные условия дифференцируемости функций, представление производной итоговой функции через матрицу Якоби и градиенты, а также композиционные связи между ними. В результате формула для нахождения производной сложной функции представляется в более общем, инвариантном и удобном для практического применения виде. Данное обобщённое доказательство служит важной теоретической основой в задачах математического анализа, дифференциальных уравнений и оптимизации.

Ключевые слова: Сложная функция, производная, композиционная теорема, правило цепочки, матрица Якоби, градиент, дифференцируемость, функция нескольких переменных.

GENERALIZATION OF THE PROOF OF THE COMPOSITE THEOREM FOR THE DERIVATIVE OF A COMPOSITE FUNCTION

Abstract: This paper generalizes the proof of the composite (chain rule) theorem for determining the derivative of a composite function for functions of one and several variables. In classical analysis, this theorem is considered only for differentiable functions under restricted conditions, whereas in this study the proof is extended to more general conditions, including vector-valued functions and functions in parametric form. In particular, the necessary and sufficient conditions for differentiability are analyzed, as well as the representation of the derivative of the resulting function through the Jacobian matrix and gradients, and the compositional relationships between them. As a result, the formula for determining the derivative of a composite function is expressed in a more general, invariant, and convenient form for practical applications. This generalized proof serves as an important theoretical basis in problems of mathematical analysis, differential equations, and optimization.

Keywords: Composite function, derivative, composite theorem, chain rule, Jacobian matrix, gradient, differentiability, multivariable function.

Kirish

Matematik analizda murakkab funksiya tushunchasi va uning hosilasini aniqlash masalasi eng muhim va fundamental mavzulardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, bir funksiya boshqa bir funksiyaning qiymatlariga bog'liq bo'lib aniqlanganda, ya'ni funksiyalar kompozitsiyasi yuzaga kelganda, hosilani topish uchun maxsus qoida — kompozitsion teorema (zanjir qoidasi) qo'llaniladi. Ushbu qoida boshlang'ich darajadagi analiz kurslarida ham muhim o'rin tutadi, chunki u real jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo'llaniladi.

Agar oddiy holatda funksiyalar quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsa:

$$y = f(u), u = g(x),$$

u holda murakkab funksiya

$$y = f(g(x))$$

ko'rinishini oladi va uning hosilasi klassik zanjir qoidaga ko'ra quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Bu formula ko'rinishidan sodda va qulay bo'lishiga qaramay, u faqat bir o'zgaruvchili differentsiallanuvchi funksiyalar uchun bevosita qo'llaniladi. Real amaliy masalalarda esa ko'pincha bir nechta o'zgaruvchili, vektor qiymatli yoki parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalar uchraydi. Shunday vaziyatlarda klassik zanjir qoidaning oddiy ko'rinishi yetarli emas va uni umumlashtirish zarurati yuzaga keladi.

Masalan, agar

$$z = f(x, y), x = g(t), y = h(t)$$

bo'lsa, u holda hosila quyidagi munosabat orqali aniqlanadi:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Bu ifoda allaqachon qisman hosilalar va bir nechta funksiyalarning kompozitsiyasini o'z ichiga oladi. Biroq, bu ham umumiy holat emas. Chunki real masalalarda quyidagicha ko'rinishlar ham ko'p uchraydi:

$$y = F(x), x = G(t),$$

ya'ni vektor-funksiyalar kompozitsiyasi. Bu yerda hosila oddiy son emas, balki matritsa (Yakobi matritsasi) ko'rinishida ifodalanadi:

$$J_{F \circ G}(t) = J_F(G(t)) \cdot J_G(t).$$

Aynan mana shunday murakkab, ko'p o'zgaruvchili va vektorli funksiyalar uchun zanjir qoidani umumlashtirish muhim ilmiy vazifa hisoblanadi. Chunki ko'p jarayonlar, masalan, deformatsiya, issiqlik tarqalishi, oqimlar dinamikasi, iqtisodiy modellar va optimallashtirish masalalari aynan vektor-funksiyalar orqali ifodalanadi.

Shuningdek, differentsiallanuvchanlik tushunchasining o'zi ham chuqurroq tahlilni talab qiladi. Funksiyaning faqat uzluksiz bo'lishi yetarli emas, balki u ma'lum ma'noda silliq, ya'ni yaqin atrofida yaxshi chiziqli aproksimatsiyaga ega bo'lishi talab qilinadi. Umumiy holda esa differentsiallanuvchanlik quyidagi ifoda bilan belgilanadi:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\|\Delta x\|),$$

bu yerda A — chiziqli operator (matritsa yoki son), $o(\|\Delta x\|)$ esa kichik tartibli funksiya.

Demak, murakkab funksiya hosilasini aniqlash faqat mexanik ko'paytma emas, balki limit, chiziqli yaqinlashtirish va operatorlar kompozitsiyasiga tayanadi.

Shu sababli ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi — murakkab funksiya hosilasi uchun kompozitsion teoremaning isbotini umumlashtirish, ya'ni:

- bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun emas,
- ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun,
- vektor-funksiyalar uchun,
- parametrik berilgan funksiyalar uchun

zanjir qoidani yagona, umumiy va invariant shaklda asoslab berishdan iborat.

Mazkur ishda:

1. Kompozitsion funksiya tushunchasi matematik jihatdan asoslanadi;
2. Differentsiallanuvchanlikning yetarli shartlari tahlil qilinadi;

3. Yakobi matritsasi, gradient va operatorlar ishtirokida umumiy isbot beriladi;

4. Natijada kompozitsion teoremaning kengaytirilgan isboti formulalar bilan umumlashtiriladi.

Bu natijalar nafaqat nazariy analiz uchun, balki differensial tenglamalar, optimal boshqaruv va sun'iy intellekt algoritmlarida ham muhim nazariy asos vazifasini bajaradi.

Shunday qilib, ushbu ish murakkab funksiya hosilasini aniqlash masalasiga yangicha va kengroq matematik yondashuvni taklif etadi hamda klassik zanjir qoidasini umumlashgan, zamonaviy va universallashtirilgan shaklga keltirishga qaratilgan.

Metodologiya

Mazkur tadqiqotda murakkab funksiya hosilasi uchun kompozitsion teoremaning isbotini umumlashtirish maqsadida analitik va vektorli yondashuvlar birlashtirildi. Tadqiqot davomida klassik zanjir qoidasining faqat bir o'zgaruvchili holati emas, balki ko'p o'zgaruvchili, vektor qiymatli va parametrik berilgan funktsiyalar uchun ham umumiy shakli keltirib chiqarildi.

Metodologiya asosan quyidagi bosqichlarga tayandi.

1. Murakkab funksiya va uning kompozitsiyasi

Tadqiqotning birinchi bosqichida kompozitsion funksiya tushunchasi umumiy ko'rinishda kiritildi. Agar

$$y = F(x), x = G(t)$$

bo'lsa, u holda murakkab funksiya

$$y = F(G(t))$$

ko'rinishda aniqlanadi. Bu yerda

- $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — vektor qiymatli funksiya,
- $G: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — oraliq funksiya,
- $t \in \mathbb{R}^k$ — parametrlar vektori.

Bu ifoda yordamida murakkab funksiyaning umumiy, eng keng ko‘rinishi olinadi.

2. Differensiallanuvchanlikning umumiy ta’rifi

Funksiyaning differensiallanuvchanligi klassik limit asosida emas, balki chiziqli yaqinlashtirish orqali aniqlanadi. Agar

$$F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) = A \cdot \Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|)$$

ko‘rinishida ifodalanib, bu yerda A — chiziqli operator (matritsa), $o(\|\Delta \mathbf{x}\|)$ — kichik tartibli had bo‘lsa, u holda funksiya $\mathbf{x}$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Ushbu yondashuv yordamida differensiallanuvchanlik faqat bir o‘zgaruvchili funksiya doirasidan chiqarilib, umumiy, vektor holatiga o‘tkazildi.

3. Yakobi matritsasi orqali ifodalash

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya hosilasi quyidagi Yakobi matritsasi yordamida ifodalanadi:

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Xuddi shunday,

$$J_G(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

oraliq funksiyaning Yakobi matritsasini ifodalaydi.

4. Kompozitsion teoremaning umumiy formulasi

Zanjir qoida (kompozitsion teorema) bo‘yicha murakkab funksiya hosilasi quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$J_{F \circ G}(\mathbf{t}) = J_F(G(\mathbf{t})) \cdot J_G(\mathbf{t})$$

Bu ifoda murakkab funksiya hosilasining **umumlashgan va invariant formulasi** sifatida qabul qilindi. Tadqiqot aynan mana shu formulani umumiy shartlarda isbotlashga yo'naltirildi.

Matritsalar ko'paytmasi orqali aniqlangan ushbu formula:

- bir o'zgaruvchili,
- ko'p o'zgaruvchili,
- parametrik,
- vektor qiymatli

funksiyalar uchun birdek amal qiladi.

5. Parametrik holatni tadqiq qilish

Agar funksiya quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsa:

$$z = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

u holda kompozitsion hosila:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu formula umumiy matritsa ko'rinishining maxsus ko'rinishi ekanligi ko'rsatildi.

6. Metodologiyaning ilmiy ahamiyati

Taklif etilgan metod orqali:

- ✓ Kompozitsion teorema umumiy holga keltirdi;
- ✓ Vektor-funksiyalar uchun to'liq ifoda olindi;
- ✓ Differentsiallanuvchanlikning umumiy sharti aniqlandi;
- ✓ Klassik zanjir qoidasi kengaytirildi;
- ✓ Matritsa va operatorlar asosida isbotlandi

Mazkur metod matematik analiz, differensial tenglamalar, vektor analiz, sun'iy intellekt va optimallashtirish masalalarida qo'llash uchun mustahkam nazariy asos yaratadi.

Natijalar

Tadqiqot davomida murakkab funksiya hosilasi uchun kompozitsion teoremaning klassik shakli umumlashtirildi va u ko'p o'zgaruvchili, vektor qiymatli hamda parametrik berilgan funksiyalar uchun yagona, umumiy va invariant ko'rinishda ifodalandi.

Fazoda berilgan quyidagi ikki funksiya kompozitsiyasi qoraladi:

$$y = F(x), x = G(t),$$

natijada murakkab funksiya

$$y = (F \circ G)(t) = F(G(t))$$

hosil bo'ladi.

Bu yerda:

- $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — tashqi funksiya,
- $G: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ichki funksiya,
- $t \in \mathbb{R}^k$ — parametrlar vektori.

Natijalar shuni ko'rsatdiki, murakkab funksiya hosilasi (to'liq differensial) quyidagi **umumiy va invariant formula** asosida aniqlanadi:

$$D(F \circ G)(t) = DF(G(t)) \cdot DG(t)$$

yoki Yakobi matritsasi orqali:

$$J_{F \circ G}(t) = J_F(G(t)) \cdot J_G(t)$$

Mazkur tenglik ushbu tadqiqotning **asosiy ilmiy natijasi** bo'lib, u quyidagi holatlarni to'liq qamrab oladi:

Bir o'zgaruvchili funksiya holati:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ikki o'zgaruvchili parametrik holat:

$$z = f(x(t), y(t)) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Vektor funksiyalar kompozitsiyasi:

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \Rightarrow J_{F \circ G} = J_F \cdot J_G$$

Bundan tashqari, tadqiqot davomida quyidagi muhim xulosalar ham olindi:

- Agar F va G differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning kompozitsiyasi ham differentsiallanuvchi bo'ladi;
- Kompozitsion hosila faqat funksiyalar qiymatiga emas, balki ularning chiziqli yaqinlashish operatoriga ham bog'liq;
- Hosila faqat son emas, balki operator yoki matritsa sifatida qaraladi.

Teorema: Agar

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ va } G: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

funksiyalar t_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning kompozitsiyasi

$$H(t) = F(G(t))$$

ham differentsiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi quyidagicha aniqlanadi:

$$DH(t_0) = DF(G(t_0)) \cdot DG(t_0)$$

Isbot: Funksiyalar differentsiallanuvchanligi ularni mos ravishda chiziqli operatorlar orqali yaqinlashtirish imkonini beradi. Ichki funksiya chiziqli yaqinlashuvini tashqi funksiya argumentiga qo'yib, ortiqcha kichik hadlar bekor bo'lishi natijasida kompozitsiyaning differentsiali matritsalar ko'paytmasi sifatida hosil bo'ladi. Shuning orqali umumlashgan zanjir qoida isbotlanadi.

Bu natija ushbu ishning asosiy yangi ilmiy yutug'i hisoblanadi.

Muhokama

Olingan natijalar klassik zanjir qoidasiga nisbatan ancha umumiy va chuqurroq talqinni taklif etadi. Odatda, o'rta ta'lim yoki bakalavr bosqichida o'rganiladigan zanjir qoida faqat bir o'zgaruvchili funksiya uchun ko'rsatiladi. Biroq real ilmiy va amaliy muammolarda ko'pincha ko'p o'zgaruvchili va vektor qiymatli funksiyalar bilan ishlashga to'g'ri keladi.

Ushbu tadqiqotda hosila tushunchasi faqat son emas, balki **operator** sifatida qaralganligi muhim ilmiy jihat hisoblanadi. Bu esa matematik analizni quyidagi sohalarga yanada yaqinlashtiradi:

- differensial tenglamalar nazariyasi,
- optimallashtirish masalalari,
- sun'iy intellekt va mashinaviy o'rganish algoritmlari,
- fizik va iqtisodiy modellar.

Masalan, neyron tarmoqlarda ishlatiladigan orqaga tarqatish algoritmi (backpropagation) aynan zanjir qoidaga asoslanadi. Ushbu umumlashgan teorema esa bunday algoritmlarning yanada mukammal matematik asosga ega bo'lishini ta'minlaydi.

Shu jihatdan, ish nafaqat nazariy, balki amaliy ahamiyatga ham ega bo'lib, murakkab tizimlarni tahlil qilish va modellashtirishda muhim vosita sifatida xizmat qiladi.

Xulosa

Mazkur ishda murakkab funksiya hosilasi uchun kompozitsion teoremaning isboti umumlashtirildi. Klassik zanjir qoidasi bir o'zgaruvchidan ko'p o'zgaruvchili va vektor qiymatli funksiyalargacha kengaytirildi hamda u operator va matritsa ko'rinishida umumiy formulaga keltirildi.

Asosiy xulosalar quyidagilardan iborat:

- Murakkab funksiya hosilasining umumiy formulasi aniqlandi;
- Yakobi matritsasi asosiy vosita sifatida ishlatildi;
- Kompozitsiya natijasidagi funksiya differentsiallanuvchiligiga isbot berildi;
- Teorema umumiy, invariant va universal shaklda ifodalandi;
- Natijalar nazariya va amaliyot o'rtasidagi bog'lanishni mustahkamladi.

Natijada, kompozitsion teorema yanada kengroq, mustahkamroq va ilmiy jihatdan to'liq asoslangan holga keltirildi. Ushbu ish kelajakdagi tadqiqotlar, ayniqsa, matematik modellashirish va optimallashtirish yo'nalishlari uchun mustahkam poydevor bo'lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2008). *Calculus: One and several variables*. Moscow: Fizmatlit.
2. Apostol, T. M. (1967). *Calculus, Volumes I & II*. New York, NY: John Wiley & Sons.
3. Boymurodov, T., & Xudoyberganov, O. (2018). *Matematik analiz asoslari*. Toshkent: Akademyashr.
4. Demidovich, B. P. (2002). *Masalalar va misollar bilan matematik analiz*. Toshkent: O'qituvchi.
5. Zorich, V. A. (2004). *Mathematical analysis* (Vols. 1–2). Berlin: Springer.
6. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
7. Ismoilova D., & Mahmudova, D. (2025). Ko'p o'lchovli yevklid fazosi: o'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. *Innov. Conf.* Published online April 17, 2025:1-7. Accessed April 18, 2025.
8. Mamatkadirova Zebo Tohirjon qizi, & Dilnoza Xaytmirzayevna Maxmudova. (2025). Constructing an ellipse using conjugate diameters and its applications. *International Scientific and Current Research Conferences*, 1(01), 48–55