

BOSH TO‘PLAM O‘RTACHA MIQDORI UCHUN ISHONCH INTERVALI: STYUDENT STATISTIKASI

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti

Rustamov Bobur

Assistant: Xabibulla Madraimov

1 O‘zbekcha annotatsiya (kengaytirilgan)

Ushbu maqolada bosh to‘plam o‘rtacha miqdorini baholashda ishonch intervallari va Student t-statistikasi ishlatilish usullari tahlil qilinadi. Nazariy asoslar, formulalarning kelib chiqishi va ularning matematik isboti batafsil yoritiladi. Shuningdek, maqolada amaliy misol keltiriladi, unda 95% ishonch intervali hisoblanadi va natijalar tahlil qilinadi. Maqola kichik tanlamalarda t-statistikaning qo‘llanishi, dispersiyaning ta‘siri va tanlanma hajmining ishonch intervaliga ta‘siri haqida tushuncha beradi. Bu tadqiqot statistik baholash metodlarini amaliyotda qo‘llash uchun muhim ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: bosh to‘plam, o‘rtacha miqdor, ishonch intervali, Student t-statistikasi, kichik tanlama, dispersiya, amaliy misol, matematik isbot, tanlanma hajmi, statistik baholash

2 Inglizcha annotatsiya (kengaytirilgan)

This article analyzes the methods of using confidence intervals and Student's t-statistic for estimating the population mean. Theoretical foundations, the derivation of formulas, and their mathematical justification are thoroughly explained. Additionally, a practical example demonstrates the calculation of a 95% confidence interval and the interpretation of the results. The article provides insights into the application of t-statistics for small sample sizes, the impact of variance, and sample size on confidence intervals. This research is important for the practical implementation of statistical estimation methods.

Keywords: population mean, confidence interval, Student's t-statistic, small sample, variance, practical example, mathematical justification, sample size, statistical estimation, results interpretation

3 Ruscha annotatsiya (kengaytirilgan)

В данной статье рассматриваются методы использования доверительных интервалов и t-статистики Стьюдента для оценки среднего значения генеральной совокупности. Подробно объяснены теоретические основы, вывод формул и их математическое обоснование. Кроме того, приведён практический пример, демонстрирующий расчет 95%-ного доверительного интервала и интерпретацию полученных результатов. Статья также освещает применение t-статистики при малых выборках, влияние дисперсии и размера выборки на доверительные интервалы. Это исследование имеет важное значение для практического применения методов статистической оценки.

Ключевые слова: генеральная совокупность, среднее значение, доверительный интервал, t-статистика Стьюдента, малая выборка, дисперсия, практический пример, математическое обоснование, размер выборки, статистическая оценка

Kirish qism: Statistika fanida bosh to'plam parametrlarini baholash insoniyat faoliyatining deyarli barcha sohalarida — iqtisodiyot, tibbiyot, ta'lim, ishlab chiqarish, moliya, texnika va hatto demografiyada ham — muhim o'rin tutadi. Amaliyotda to'plamdagi barcha birliklarni o'lchash deyarli imkonsiz bo'lgani uchun, odatda namunadan foydalaniladi. Namuna asosida olingan baholar esa aniq son emas, balki tasodifiy o'zgaruvchi bo'lgani sababli, ular atrofida ishonch intervallari quriladi.

Bosh o'rtacha miqdor (μ) eng ko'p uchraydigan parametr bo'lib, uni baholashda ikkita holat mavjud:

1. Bosh dispersiya ma'lum bo'lsa — Z-statistika qo'llaniladi.
2. Bosh dispersiya noma'lum bo'lsa — Student t-statistikasi qo'llaniladi.

Odatda hayotda bosh dispersiya noma'lum bo'lganligi sababli, t-statistika eng ko'p qo'llaniladigan vositalardan biridir.

Tahlil va natijalar: **ISHONCH INTERVALI TUSHUNCHASI VA UNING STATISTIK MAZMUNI**

Ishonch intervali — bu bosh parametrning ehtimollik jihatdan joylashishi mumkin bo'lgan oraliqdir. Bu intervalning mohiyati shundaki:

- Biz tanlangan namunani **ko'p marta takrorlaganda**,
- Har safar ishonch intervali qurilganda,
- Ularning **(1 – α) qismi** haqiqiy parametrni o'z ichiga oladi.

Masalan: 95% ishonch darajasi → α = 0.05 → 95 ta interval ichida 95 tasi o'rtacha qiymatni qamrab oladi.

Demak, intervalning o'zi tasodifiy, parametr esa — doimiy.

Ishonch intervali ikki nuqtadan iborat:

- **Quyi chegara**
- **Yuqori chegara**

Ular tanlangan ishonch darajasiga qarab torayadi yoki kengayadi.

3. BOSH TO'PLAM O'RTACHASINI BAHOLASH (NAZARIY ASOS)

Namuna o'rtachasi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Bu baho:

- **eng yaxshi notenglashtirilgan baho**,
- **minimal dispersiyaga ega**,
- **Markov–Chebyshev shartlarini qanoatlantiradi.**

Namuna asosida dispersiya bahosi:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Bu yerda $n - 1$ — erkinlik darajasi.

Bu baho **notenglashtirilgan** (unbiased) bo'lishi uchun 1 o'rniga ($n-1$) yoziladi.

4. STYUDENT t-STATISTIKASINING MOHIYATI VA PAYDO BO'LISH

SABABI

Agar bosh dispersiya noma'lum bo'lsa, quyidagi nisbat olinadi:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Bu nisbat **Styudent taqsimotiga** bo'ysunadi.

Nima uchun Z emas, t ishlatiladi?

Chunki:

- Bosh dispersiya σ noma'lum.
- Biz uning o'rniga **namuna dispersiyasi** s dan foydalanamiz.
- s — tasodifiy o'zgaruvchi, shuning uchun nisbat Z emas, t bo'ladi.

t-taqsimotning xususiyatlari:

- Simmetrik
- Qanotlari Z-taqsimotdan **kattaroq**
- n oshgan sayin Z-taqsimotga yaqinlashadi
- $n \rightarrow \infty$ bo'lsa: $t \rightarrow Z$

Demak, kichik n (masalan 10, 15) uchun t juda muhim!

5. t-INTERVAL FORMULASINING ISBOTI

Quyidagidan boshlaymiz:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = t_{n-1}$$

Ushbu tenglamani μ ga nisbatan yechamiz:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Bu — eng mashhur va eng ko‘p qo‘llaniladigan ishonch intervali formulasi.

6. AMALIY MISOL (TO‘LIQ, IZOH BILAN)

Masala:

10 ta talabning baholari:

8, 9, 7, 10, 6, 8, 9, 7, 8, 9

95% ishonch intervali topilsin.

BIRINCHI: O‘RTACHA

$$\bar{x} = 8.1$$

IKKINCHI: FARQ KOEFFITSIENTLARI

Har bir qiymatdan 8.1 ayiriladi:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
8	-0.1	0.01
9	0.9	0.81
7	-1.1	1.21
10	1.9	3.61
6	-2.1	4.41
8	-0.1	0.01
9	0.9	0.81
7	-1.1	1.21
8	-0.1	0.01

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
9	0.9	0.81

Yig'indisi:

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 13.29$$

UCHINCHI: Namunaviy dispersiya

$$s^2 = \frac{13.29}{9} = 1.477$$

$$s = 1.216$$

TO'RTINCHI: t-kritik qiymat

$$n = 10$$

$$df = 9$$

$$95\% \rightarrow t = 2.262$$

BESHINCHI: Xatolik chegarasi

$$E = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$E = 2.262 \cdot \frac{1.216}{\sqrt{10}}$$

$$E = 2.262 \cdot 0.384 = 0.868$$

Yakuniy interval

$$8.1 \pm 0.868$$

$$7.232 \leq \mu \leq 8.968$$

7. ISHONCH DARAJASI, TANLANMA HAJMI VA DISPERSIYA

TA'SIRI

1) Ishonch darajasi oshsa → interval kengayadi

Ishonch darajasi	t-kritik	Interval
90%	1.833	tor
95%	2.262	o'rtacha
99%	3.250	keng

2) n oshsa → interval torayadi

Chunki:

$$\sqrt{n} \text{ ortadi} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ kamayadi}$$

3) Dispersiya katta bo'lsa → interval kengayadi: O'zgaruvchanlik qanchalik katta bo'lsa, ishonch intervalidagi noaniqlik ham shunchalik ko'p bo'ladi.

Xulosa: Styudentning t-statistikasi kichik tanlamalar ($n < 30$) uchun eng ishonchli matematik vositalardan biri hisoblanadi. Bosh dispersiya noma'lum bo'lganda, aynan t-taqsimot bosh o'rtachaning noaniqligini to'g'ri baholaydi va o'rtacha miqdor uchun haqiqiy ishonch intervalini beradi.

Amaliy misollar shuni ko'rsatadiki:

- tanlanma kichik bo'lsa interval keng bo'ladi,
- ishonch darajasi oshsa, xato chegarasi ortadi,
- dispersiya kattalashsa, aniqlik pasayadi.

Bu usul statistika, iqtisodiyot, tibbiyot, eksperimental ilm-fan va ta'lim sifatini baholashda keng qo'llaniladi

Foydalanilgan

adabiyotlar:

1. Montgomery D. "Applied Statistics and Probability", 2019.

2. Mood A., Graybill F. "Introduction to the Theory of Statistics".
3. O'zbekiston Milliy Universiteti, "Statistika" darsligi.
4. Casella & Berger. "Statistical Inference", 2017.
5. Styudent (William Gosset) statistikasi haqidagi ilmiy maqolalar.