ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И С ПОСТОЯННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Тураев Х–*кандидат физико-математических наук., доцент ТерДПИ*
haydarturayev1950@gmail.com
Маматмуротов Р.Ш
преподаватель ТерДПИ
rufatbekmamatmurotov2@gmail.com

Аннотация. В этой статье даётся метод построения общего решения уравнений вида

$$x(t+2p)+a(t)x(t+p)+b(t)x(t)=g(t),$$

где $p \neq 0$ – некоторое число, $a(t)$ и $b(t)$ – периодические, периода p , функции.

Ключевые слова: линейные,, уравнения, метод, общее, однородное, неоднородное, линейные уравнения, метод , общее решения, однородное уравнение, неоднородное уравнение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$x(t+2p)+a(t)x(t+p)+b(t)x(t)=0,$$

где $p \neq 0$ – некоторое число, $a(t)$ и $b(t)$ – периодические, периода p , функции. Будем искать частные решения в виде

$$x(t)=[\lambda(t)]^{\frac{t}{p}},$$

где $\lambda(t)$ – подлежащая определению периодическая, периода p, функция.

Из вида частного решения имеем

$$x(t+p)=[\lambda(t+p)]^{\frac{t+p}{p}}=[\lambda(t+p)]^{\frac{t}{p}}.\lambda(t),$$

$x(t+2p) = [\lambda(t+2p)]^{\frac{t+2p}{p}} = [\lambda(t+2p)]^{\frac{t}{p}}.\lambda^2(t)$.

Подставляя найденные значения в (1.35), получим

$$[\lambda(t)]^{\frac{t}{p}} \cdot \left(\lambda^2(t) + a(t)\lambda(t) + b(t)\right)b(t) = 0 .$$

Отсюда имеем

$$\lambda^2(t) + a(t)\lambda(t) + b(t) = 0 .$$

(т.е. периодическая функция), то решения

$x_1(t) = [\lambda_1(t)]^{\frac{t}{p}}$

и

$x_2(t) = [\lambda_2(t)]^{\frac{t}{p}}$

Линейно независимые функции по Ω , следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

Общее решение имеет вид

где $\omega_1(t), \omega_2(\mathrm{t}) \in \Omega$.

1) Пусть на множестве E_0 $\lambda_{1,2}(t)$ – комплексные функции , т.е.

$\lambda_{1,2}(t) = r(t)e^{\pm\varphi(t)}$,

где $r(t), \varphi(t)$ – действительные функции.
Тогда функция

$$[r(t)e^{\pm\varphi(t)}]^{\frac{t}{p}} = (r(t))^{\frac{t}{p}}\left(\left(\cos\frac{\varphi(t)}{p}\right)t + \sin\frac{\varphi(t)}{p}t\right) \qquad (1.38)$$

является комплексным решением уравнения (1.35) .

Из линейности уравнения следует, что действительная и мнимая части функции (1.38) также являются решениями данного уравнения, т.е

$$.x_1(t) = (r(t))^{\frac{t}{p}} \cos\frac{t\varphi(t)}{p}, \quad x_2(t) = (r(t))^{\frac{t}{p}} \sin\frac{t\varphi(t)}{p}.$$

Очевидно, эти решения также линейно независимы по Ω . Следовательно, общее решение имеет вид

$$x(t) = (r(t))^{\frac{t}{p}} \left(\omega_1(t)\cos\frac{t\varphi(t)}{p} + \omega_2(t)\sin\frac{t\varphi(t)}{p}\right), \qquad (1.39)$$

где $\omega_1(t), \omega_2(\mathrm{t}) \in \Omega$.

2) Пусть на множестве E_0 $\lambda_1(t) \equiv \lambda_2(t) \equiv \lambda(t)$.
   В этом случае нам известно одно частное решение

$$x_1(t) = [\lambda(t)]^{\frac{t}{p}} .$$

Вычисляя по формуле (1.24) второе частное решение $x_2(t)$, линейно независимое по Ω с $.x_1(t)$, найдем, что $x_2(t) = t.x_1(t)$. Поэтому общее решение имеет вид

$$x(t) = (r(t))^{\frac{t}{p}}(\omega_1(t) + t \cdot \omega_2(t)), \qquad (1.40)$$

где $\omega_1(t), \omega_2(\mathrm{t}) \in \Omega$.

3) Пусть ни одно из условий 1), 2) или 3) не имеет места на всем множестве E_0 . В этом случае E_0 разбивается на три множества так, чтобы на каждом из этих подмножеств имело место одно из условий 1), 2) или 3) .
   Для каждого такого подмножества строится общее решение, соответственно случаям 1). 2) или 3) в отдельности и продолжается на $(-\infty, +\infty)$ периодическом образом.

   Примеры:

   1) $x(t + 2p) + ax(t + p) + bx(t) = 0$, (1.41)

где p$\neq 0$, $a, b -$ постоянные, $a \cdot b \neq 0$.
Соответствующее характеристическое уравнения имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 . \qquad (1.42)$$

Пусть $a^2 - 4b > 0$ и $\lambda_1(t) \equiv \lambda_2(t)$ – корни этого уравнения. Тогда в силу (1.37), общее решение уравнения (1.41) имеет вид

$$x(t) = \lambda_1^{\frac{t}{p}} \cdot \omega_1(t) + \lambda_2^{\frac{t}{p}} \cdot \omega_2(t) \qquad (1.43)$$

где $\omega_1(t), \omega_2(\mathrm{t})$ – любые p – периодические функции.

Пусть $a^2 - 4b < 0$ $\lambda_{1,2} = re^{\pm\varphi(t)}$ – корни характеристического уравнения (1.42). Тогда в силу (1.39) общее решение имеет вид

$$x(t) = r^{\frac{t}{p}}\left(\omega_1(t)\cos\frac{\varphi}{p}t + \omega_2(t)\sin\frac{\varphi}{p}t\right).$$

Если $a^2 = 4b$ λ_0 – кратный корень уравнения (1.42), то общее решение имеет вид

$$x(t) = \lambda_0^{\frac{t}{p}}(\omega_1(t) + t\omega_2(t)).$$

2) $x(2t + 2\pi) + \frac{2}{\cos 2t}x(t + \pi) + x(t) = 0, \ t \neq \frac{2n+1}{4}\pi$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2(t) - \frac{2}{\cos 2t}\lambda(t) + 1 = 0$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sin 2t}{\cos 2t}$$

Является действительными функциями.
Поэтому в силу (1.37) общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(t) = \left(\frac{1+\sin 2t}{\cos 2t}\right)^{\frac{t}{\pi}} \omega_1(t) + \left(\frac{1-\sin 2t}{\cos 2t}\right)^{\frac{t}{\pi}} \omega_2(t) \, .$$

3) $x(t+2) - 2\sqrt{1+\sin 2\pi t} \cdot x(t+1) + x(t) = 0$.

$$\lambda^2(t) - 2\sqrt{1+\sin 2\pi t}\,\lambda(t) + 1 = 0$$

Корни этого уравнения являются функции

$$\lambda_{1,2}(t) = \sqrt{1+\sin 2\pi t} \pm \sqrt{\sin 2\pi t} \quad . \qquad (1.44)$$

Разобьем множество $E_0 = [0:1)$ на подмножества

$$E_0' = \{0\}, E_0'' = (0:\tfrac{1}{2}), E_0''' = [\tfrac{1}{2}:1)$$

Продолжая их на всю ось периодическим образом, рассмотрим уравнение на каждом из подмножеств вида

$$E_n' = \{n\}, E_n'' = \left(n: n+\frac{1}{2}\right), E_n''' = [n+\frac{1}{2}: n+1)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. На множестве E_n' корни (1.44) кратные $\lambda_{1,2}(t) = 1$.
Поэтому, в силу (1.40), общее решение имеет вид

$x(n) = C_1 + nC_2$,

где C_1, C_2 – постоянные, принадлежащие Ω .

На множестве E_n'' корни (1.44) действительные.

По этому в силу имеет вид(1.38) общее решение имеет вид

$$x(t) = \left(\sqrt{1+\sin 2\pi t} + \sqrt{\sin 2\pi t}\,\right)^t \omega_1(t) + \left(\sqrt{1+\sin 2\pi t} - \sqrt{\sin 2\pi t}\,\right)^t \omega_2(t).$$

и на множестве E_n''' корни (1.44) комплексные. Поэтому в силу (1.39) общее решение имеет вид

$$x(t) = \omega_1(t) \cdot \cos\left(t \sin^{-1} \sqrt{-\sin 2\pi t}\right) + \omega_2(t) \cdot \sin(t \sin^{-1} \sqrt{-\sin 2\pi t}\,),$$

где $\omega_1(t), \omega_2(\mathrm{t}) \in \Omega$, $t \in E_n'''$.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$x(t+2p) + a(t)x(t+p) + b(t)x(t) = g(t) \qquad (1.45)$$

где $p \neq 0$ – некоторое число, $a(t), b(t), g(t)$ – периодические, периода p, функции.

Пусть

$$1 + a(t) + b(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \in E_0' \subset E_0, \\ \neq 0 \text{ при } t \in E_0 \backslash E_0'. \end{cases} \qquad (1.46)$$

Частные решение $\vartheta(t)$ данного уравнения будем искать в виде

1) $\vartheta(t) = \alpha(t)$, $t \in E_0 \backslash E_0'$,
2) $\vartheta(t) = \alpha(t)$, $t \in E_0'$,

где $\alpha(t)$ – подлежащая к определению, p – периодическая функция.

Пусть $t \in E_0 \backslash E_0'$. Подставляя значение $\vartheta(t)$ в уравнение, получим

$$(1 + a(t) + b(t))\alpha(t) = g(t).$$

Отсюда

$$\alpha(t) = \frac{g(t)}{1+a(t)+b(t)}, \quad t \in E_0 \backslash E_0'.$$

Пусть $t \in E_0'$. Подставляя в уравнение значение $\vartheta(t)$, получим

$$t \cdot \left(1 + a(t) + b(t)\right)\alpha(t) + \left(2p + p \cdot a(t)\right)\alpha(t) = g(t)$$

или в силу (1.46) , имеем

$$p\cdot\big(2+a(t)\big)\alpha(t)=g(t)\ .$$

Отсюда

$$\alpha(t)=\frac{g(t)}{(2+a(t))\cdot p}\ ,\ \ a(t)\neq-2\ .$$

Если же $a(t)=-2$, то уравнение (1.45) примет вид

$$x(t+2p)-2x(t+p)+x(t)=g(t)\ .$$

Тогда частное решение будем искать в виде $\vartheta(t)=t^2\cdot\alpha(t)$ и получим , что

$$\vartheta(t)=\frac{t^2}{2p^2}\cdot g(t)\ \ .$$

Таким образом частное решение уравнения (1.45) имеет вид

$$\vartheta(t)=\begin{cases}\dfrac{g(t)}{1+a(t)+b(t)}\ ,\ \ 1+a(t)+b(t)\neq0\ ,\\ \dfrac{t\cdot g(t)}{1+a(t)+b(t)}\ ,\ \ 1+a(t)+b(t)\neq0\ ,\ \ a(t)\neq-2\ ,\\ \dfrac{t^2}{2p^2}\cdot g(t)\ ,\ \ a(t)=-2\ ,\ b(t)=1\ .\end{cases}$$

Литература:

1. Пелюх Г.П., Шарковский А.Н. О линейных разностных уравнениях с периодическими коэффициентами В кн.: Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1977. с.91-10
2. Haydar To’rayev . Ayirmali tenglamalarning uzluksiz va davriy yechimlari. Monografiya. Toshkent: “SARVAR PRINT” MCHJ, 2024.
3. Турдиев Т., Шарифова Т. Линейные функционально-разностные уравнения. //Изв. АНУзССР, №1, 1975.
4. А.М.Зверкин. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. В кн.: Пятая летняя математическая школа. Киев. 1968.с.307-399.
5. А.М. Зверкин. Обшее решение линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Научные докл. высш. школы, физ.-матем. Науки, 1 (1969).