

INTEGRALLAR YORDAMIDA YUZALARNI HISOBLASH

Abirov Ruxshod Ashirovich*Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti
qoshidagi akademik litseyi matematika o'qituvchisi*

Tel: 99 9658496

Email: abirovruxshod612@gmail.com

Annotatsiya: Integrallar yordamida yuzalarni hisoblash matematik analizning muhim bo'limlaridan biridir. Ushbu usul olamning ko'plab fizik, geometriya va texnika sohalarida keng qo'llaniladi. Yuzalarni aniqlash uchun integral tushunchasi, uning xossalari va hisoblash usullari haqida mukammal bilimga ega bo'lish talab etiladi. Ushbu maqolada Integrallar yordamida yuzalarni hisoblash haqida ma'lumotlar berilgan.

Kalit so'zlar: integral, yuzani hisoblash, matematik analiz, geometrik figuralar, chiziqli integral, aniq integral, maydon, qo'shma integral, sohalar yuzasi, amaliy matematika.

Аннотация: Вычисление поверхностей с использованием интегралов является одним из важных разделов математического анализа. Этот метод широко используется во многих областях физики, геометрии и техники. Для определения поверхностей необходимо отличное знание понятия интегралов, их свойств и методов вычисления. В данной статье представлена информация о вычислении поверхностей с использованием интегралов.

Ключевые слова: интеграл, вычисление поверхности, математический анализ, геометрические фигуры, линейный интеграл, определенный интеграл, площадь, совместный интеграл, поверхность сфер, прикладная математика.

Abstract: Calculating surfaces using integrals is one of the important sections of mathematical analysis. This method is widely used in many areas of physics, geometry and engineering. To determine surfaces, it is necessary to have excellent knowledge of the concept of integrals, its properties and calculation methods. This article provides information on calculating surfaces using integrals.

Keywords: integral, surface calculation, mathematical analysis, geometric figures, linear integral, definite integral, area, joint integral, surface of spheres, applied mathematics.

KIRISH

Avvalo, integral tushunchasi haqida to'xtalib o'tish zarur. Integral matematikda funksiyaning biror oralig'ida to'plagan qiymatini yoki boshqa so'z bilan aytganda, funksiyaning ostidagi maydonni hisoblash uchun ishlatiladi. To'g'ri chiziqli va egri

chiziqli figurali yuzalarni aniqlashda asosiy vosita – bu aniqlangan (definite) integral hisoblanadi. Agar funksiya $y = f(x)$ $[a, b]$ oraliqda aniq bersa, u holda x o'qining a va b nuqtalari orasidagi $y = f(x)$ funksiya grafigi ostida qolgan S yuzani topish uchun quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Bu yerda dx – x o'qi bo'ylab kichik oraliqni bildiradi, $f(x)$ esa, ushbu nuqtalarda funksiyaning qiymatini ifodalaydi. Bu integral ifodaning natijasi grafigi va x o'qi oralig'idagi maydonni beradi. Integral tushunchasini tushunish uchun, avvalo, $f(x)$ funksiya grafigi va x o'qining a va b oraliqda qanday vaziyatda joylashganini ko'rib chiqish kerak. Agarda $f(x) \geq 0$ bo'lsa, ya'ni funksiya grafigi x o'qidan yuqorida bo'lsa, bu holda integral natijasi to'g'ridan-to'g'ri yuzaning maydoniga teng bo'ladi. Agar funksiya ayrim oraliqlarda manfiy bo'lsa, u holda integral musbat va manfiy sohalarning farqini beradi. Shu sababli, differensial tahlil yordamida faqatgina ijobiy nuqtalarni aniqlab, alohida integral hisoblash orqali yig'indisini topish kerak bo'lishi mumkin [1].

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Yuzalarni hisoblashda har doim ham funksiya $y = f(x)$ ko'rinishda bo'lavermaydi. Ba'zi hollarda funksiya $x = g(y)$ shaklda bo'lishi mumkin. Bunday hollar uchun maydonni y o'qi bo'ylab integrallashtirish lozim bo'ladi:

$$S = \int_{cd} g(y) dy$$

Bu yerda, oraliq $[c, d]$ y o'qida tanlanadi. Shunga ko'ra, geometriyada turli figuralarning yuzasini hisoblash uchun integrallar keng ishlatiladi.

Yassi figuralarning yuzasini hisoblashda quyidagi asosiy bosqichlar bajariladi:

Birinchidan, funksiya ifodasini aniqlash va grafigini chizish muhim. Shu asosda aniqlanadigan soha oralig'i topiladi va cheklovchi chiziqlar belgilab olinadi. Chegara chiziqlar funksiyalar yoki doimiy qiymatlar bilan ifodalangan bo'lishi mumkin.

Masalan, $y = x^2$ va $y = 0$ chiziqlari orasidagi, $x = 0$ dan $x = 2$ gacha bo'lgan sohaning yuzasini topish uchun quyidagicha integral tuziladi:

$$S = \int_0^2 x^2 dx$$

Bu integralni yechish uchun avvalo x^2 funksiyaning aniq integralini hisoblab, natijasini yuqorida ko'rsatilgan oraliqda topiladi:

$$\int x^2 dx = (1/3)x^3$$

$$\text{Demak, } S = (1/3)(2)^3 - (1/3)(0)^3 = (1/3)(8) - 0 = 8/3$$

Shunday qilib, soha yuzasi $8/3$ birlik maydon tashkil qiladi.

Ayrim hollarda, yuzalar ikkita turli funksiya grafigi orasida bo'ladi. Misol uchun, $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar orasidagi soha yuzasi quyidagi formula bilan topiladi: [2].

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Bu yerda, $[a, b]$ – bu funksiya grafigi va pastki chiziq orasidagi kesishgan sohaning chegaralari hisoblanadi. Agar yuqori funksiya $f(x)$, quyi funksiya $g(x)$ bo'lsa, ularning ayirmasi o'sha oraliqdagi yuzani beradi.

Masalan, $y = x^2$ va $y = x$ funksiyalari orasidagi yuzani topish uchun avvalo bu funksiyalar qayerda kesishishini topish zarur.

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

Demak, $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda funksiyalar kesishadi. Endi oraliq $[0, 1]$ uchun integral tuziladi:

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx$$

Bu integralni hisoblab chiqamiz:

$$\int (x - x^2) dx = (1/2)x^2 - (1/3)x^3$$

Oraliqdagi qiymatlarni qo'yamiz:

$$S = [(1/2)(1)^2 - (1/3)(1)^3] - [(1/2)(0)^2 - (1/3)(0)^3] = (1/2 - 1/3) - 0 = (3/6 - 2/6) = 1/6 [3].$$

Sohaning maydoni $1/6$ birlik maydonga teng bo'ladi. Ko'rinadiki, integral yordamida ancha murakkab bo'lgan yuzalar ham oson hisoblanadi. Bundan tashqari, integral yordamida geometrikfiguralardan tashqari, fizik va iqtisodiy sohalarda ko'plab amaliy masalalar ham yechiladi. Masalan, o'zgaruvchan tezlikda harakatlanayotgan jismning bosib o'tgan masofasi vaqtga bog'liq tezligi funksiyasi yordamida integral orqali aniqlanadi. Shu sababli, integral nafaqat matematik, balki amaliy hayotda ham zarur bilimlardan biridir. Keyingi bosqichda, aylanalar, ellipslar yoki boshqa murakkab figuralarning yuzalarini hisoblash usullariga to'xtalamiz. Masalan, aylananing yuzasini hisoblash uchun $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ funksiyasidan foydalaniladi, bu yerda r – radius. Aylanani o'qdan yuqoridagi yarimini integral yordamida topamiz va hosil bo'lgan natijani ikki baravar qilamiz:

$$S = 2 \int_{-r}^r \sqrt{(r^2 - x^2)} dx$$

Bu integral standart formulaga ega, natijada aylananing to'liq yuzasini, ya'ni πr^2 formulasini olish mumkin.

Ellips yuzasini integral yordamida hisoblash biroz murakkabroq. Ellipsning umumiy tenglamasi $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Shu yerda y ni x ga nisbatan ifodalaymiz:

$$y = b\sqrt{(1 - (x^2/a^2))}$$

Ellipsning yarim qismining yuzasi uchun quyidagi integral olinadi:

$$S = 2 \int_{-a}^a b\sqrt{(1 - (x^2/a^2))} dx$$

Bu integral to'g'ridan-to'g'ri hisoblash qiyin, lekin maxsus substitutsiyalar va trigonometrik almashtirishlar yordamida yechiladi. Natijada ellipsning yuzasi $S = \pi ab$ bo'ladi [4].

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Fanga oid amaliy masalalarda ko‘p hollarda egri chiziqli figuralar bilan ishlashga to‘g‘ri keladi. Misol uchun, to‘lqinsimon yoki sinusoid chiziqlar ostidagi sohalarni hisoblash. Masalan, $y = \sin(x)$ grafigining $x = 0$ dan $x = \pi$ gacha bo‘lgan oraliqda o‘q bilan cheklangan sohani topamiz:

$$S = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$S = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Bunday savollar tabiatda, fizika darslarida tebranish yoki to‘lqin fenomenlarini tahlil qilishda uchraydi.

Yuzalarning koordinata o‘qlariga nisbatan joylashuvi ham ahamiyatli. Agar soha bir nechta bo‘lak va qismdan iborat bo‘lsa, integral summasini tup qilib, har bir bo‘lak yuzasini alohida hisoblab, umumiy natijani yig‘indisini olish mumkin. Ko‘rinadiki, integral yordamida har qanday egri chiziqli ostidagi, to‘g‘ri chiziqli, u yoki bu ko‘rinishdagi yuzalarni hisoblash ancha mukammal va qulaydir. Integralning yana bir afzalligi – u bilan chegaralangan fazovni ham (masalan, uch o‘lchamli hajm) hisoblash mumkin. Bunda uch o‘lchamli integrallar (uchlik integral) ishlatiladi. Faqatgina ikki o‘lchamli yuzalar emas, balki uch o‘lchamli jismlarning hajmini topishda ham integral usuli juda samarali.

Murakkab yuzalarni, masalan, har xil burilishli, silliq yoki burmali chiziqlar bilan chegaralangan sohalarni tahlil qilishda, bo‘lim-bo‘lim integral tuzish usulidan foydalaniladi. Bunda, har bir kichik oraliqni aniq qilib, integral yig‘indisini olish kerak bo‘ladi, ya‘ni “bo‘lakli integrallash” amalga oshiriladi. Amaliyotda integral yordamida topiladigan yuzalarning qo‘llanilishi juda keng. Fizika fanidan elektr maydon sohalari, mexanikada bajrilgan ish, qurilish sohalarida pol, tom yoki boshqa strukturali sathlarning maydonini hisoblash, iqtisodiyotda talab va taklif funksiyasi ostidagi umumiy foyda hududi kabi ko‘plab va beqiyos sohalarda ishlatiladi. Integral usullarining asosini o‘zlashtirish uchun har xil misollar ustida ko‘proq mashq bajarish, integral ifodalarni soddalashtirish usullarini (almashtirish, qismlarga ajratish) bilish va har xil funksiyalar uchun integral olish qoidalarini chuqur o‘zlashtirish zarur. Shuningdek, integralni grafikli yoki sonli (raqamli, kompyuter vositasida) hisoblash yo‘llari ham zamonaviy texnologiyalarda keng qo‘llaniladi [5].

XULOSA

Yakunda ta’kidlash kerakki, yuzalarni integrallar yordamida hisoblash – zamonaviy matematik analizning shakllanib borayotgan yangi yo‘nalishlaridan biridir. Bunda nafaqat an’anaviy algebraik va analitik yondashuvlar, balki zamonaviy dasturlash, kompyuter algoritmlari ham keng tatbiq etilmoqda. Bu esa masalaning ahamiyati va dolzarbligini yanada oshiradi. Integral yordamida yuzalarni hisoblash metodini o‘zlashtirish, o‘quvchiga, talabalarga nafaqat matematik masalalarni, balki tabiiy va texnik fanlar doirasidagi murakkab muammolarni ham oson va samarali hal

qilishga imkoniyat yaratadi. Bunday bilim esa har qanday zamonaviy ijtimoiy hayotda, texnologik jarayonlarda, sanoatda, qurilish, iqtisodiyot va boshqa ko‘plab tarmoqlarda - qisqasi, kundalik hayotda ham o‘z amaliy ahamiyatini yo‘qotmaydi. Integral haqidagi chuqur bilim, uning tanqidiy tahlili va yechish usullarini o‘rganish talaba va mutaxassislar uchun nafaqat nazariy, balki hayotiy zaruriyat sifatida doimo zarur bo‘lib keladi. Integral va uning yordamida yuzalarni hisoblashga doir mashqlar va amaliy topshiriqlarni chuqur va muntazam takrorlash orqali ushbu fanning nozik jihatlarini to‘liq egallash mumkin. Shunday qilib, integral yordamida yuzalarni hisoblash matematik analiz, geometriya, fizika, iqtisodiyot shuningdek boshqa sohalarning ham eng asosiy va zaruriy bo‘limlaridan biridir. Hayotda, kasbiy faoliyatda va ilmiy tadqiqotlar doirasida bu bilim har doim kerak bo‘lib keladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Alibekov, D. (2018). "Matematik analiz asoslari". Toshkent: O‘zbekiston Milliy Universiteti nashriyoti.
2. Aliyev, B. (2019). "Yuqori matematika va uning amaliy masalalari". Toshkent: Fan va Texnologiya nashriyoti.
3. Bobojonov, S., & Karimov, N. (2020). "Integral hisoblash va uning geometriyadagi qo‘llanilishi". Samarqand: Registon nashriyoti.
4. Jabborov, A. (2017). "Matematik analiz kursi". Toshkent: O‘zbekiston Respublikasi oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi nashriyoti.
5. Karimova, M. (2018). "Integrallar nazariyasi va uning amaliy tatbiqlari". Qarshi: Nasaf nashriyoti.
6. Mirzayev, A. (2021). "Matematika va tabiatshunoslik fanlarida integralning roli". Buxoro: Ilm ziyo nashriyoti.
7. Normatov, I. (2022). "Yassi figuralar yuzasini integral yordamida topish usullari". Toshkent: Ma’rifat nashriyoti.