TAMOGRAFIYA MASALASINI MODELLASHTIRISH VA ALGORITMINI ISHLAB CHIQISH

Shamuratova Begzada Polatbay qizi*[1]*,
[1]*Nukus davlat texnika universiteti magistrant,*
Umirbekova Saltanat Kurbanbay qızı*[2]*,
[2]*Nukus davlat texnika universiteti magistrant.*
email:saltanatumirbekova424@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada integral geometriya va Radon almashtirish asosida tomografiya masalasining matematik modellashtirilishi va algoritmini ishlab chiqish muammosi ko‘rib chiqiladi. Tibbiy va sanoat tomografiyasida uchraydigan noaniqliklar, ayniqsa, tasodifiy xususiyatga ega bo‘lgan vazn funksiyalari orqali ifodalanadi. Ushbu vazn funksiyalari yordamida ma’lumotlardagi shovqin va tashqi muhit ta’sirlarini hisobga olish imkoniyati yaratiladi. Maqolada Radon almashtirishning nazariy asoslari, uning stoxastik kengaytmalari va tasvirlarni qayta tiklashda qo‘llanilishi batafsil bayon etilgan. Shuningdek, Python dasturlash tilida ishlab chiqilgan dasturiy ta’minot yordamida nazariy natijalar sonli eksperimentlar orqali tasdiqlangan.

Kalit so‘zlar: *integral geometriya, tasodifiy vazn funksiyasi, matematik modellashtirish, ehtimollik nazariyasi, geometrik ehtimollik, kompyuter modellashtirish, algoritm, statistik tahlil, chiziqli funksiyalar, geometrik ehtimolliklar modeli.*

Tibbiy tomografiya, radiolokasiya, geofizika va hisoblash texnikasi kabi sohalarda ma’lumotlarni tahlil qilish va qayta ishlashning zamonaviy vazifalari yuqori aniqlikni va turli xil noto‘g‘ri ma’lumotlar va shovqinlarga chidamlilikni talab qiladi. Ushbu masalalarda qo‘llaniladigan kuchli vositalardan biri integral geometriya usullari, xususan, to‘g‘ri chiziqlar yoki gipertekisliklar kabi geometrik qism to‘plamlar bo‘ylab funksiyalarni ularning integrallari bo‘yicha tiklash imkonini beruvchi Radon o‘zgarishi hisoblanadi.

Shunga qaramay, real sharoitlarda ma’lumotlar ko‘pincha tashqi muhit ta’siri, bir jinsli bo‘lmaganlik va shovqinlar tufayli buziladi, bu esa modeldagi noaniqlikni hisobga olish zarurligini keltirib chiqaradi. Bunday noaniqlikni hisobga olish usullaridan biri muhitning o‘lchashlarga ta’sirini tavsiflovchi vazn funksiyalarini kiritishdir. Stoxastik g‘alayonlarni modellashtiruvchi tasodifiy vazn funksiyalaridan foydalanish, ayniqsa, dolzarb bo‘lib, bu yangi matematik va sonli yondashuvlarni ishlab chiqishni talab qiladi [1].

Bir qator zamonaviy tadqiqotlar (masalan, Q. Zhang et al., 2022; S. Xelgason, 1999; F. Natterer, 2001) [2] integral modellarga ehtimoliy parametrlarni kiritish fizik jarayonlarni modellashtirishda yanada reallikka erishish imkonini berishini ko‘rsatadi. Biroq, mavjud usullarning aksariyati determinallashgan ifodalarga yo‘naltirilgan va vazn funksiyalarining stoxastik tabiatini hisobga olmaydi, bu esa ularning amaliyotda qo‘llanilishini chegaralaydi [3].

Ushbu tadqiqot integral geometriyaning mavjud matematik apparatini kengaytirishga va noaniqlik sharoitida amaliy masalalarni yechish uchun amaliy vositalarni yaratishga qaratilgan bo‘lib, bu nazariy va amaliy jihatdan qiziqish uyg‘otadi.

Integral geometriya matematikaning bir bo‘limi bo‘lib, unda turli geometrik konfiguratsiyalar bo‘yicha integrallash orqali funksiyalar va to‘plamlarning geometrik va analitik xossalari o‘rganiladi. U differensial geometriya, o‘lchov nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va funksional analiz elementlarini birlashtiradi.

Integral geometriyaning klassik masalalari quyidagilardan iborat:

-funksiyani uning integrallari bo‘yicha fazoning ma’lum qism to‘plamlari (to‘g‘ri chiziqlar, tekisliklar, gipertekisliklar) bo‘ylab tiklash;

-harakat guruhlari harakatlaridagi invariantlarni tavsiflash;

-geometrik konfiguratsiyalar bo‘yicha integrallash yordamida hajm va ehtimolliklarni hisoblash.

Misol: ikki o‘lchovli Yevklid fazosida masala $\Omega \in R2$ sohada aniqlangan f (x,y) zichlik funksiyasini uning sohani kesib o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha integrallarining qiymatlari bo‘yicha tiklash sifatida ifodalanishi mumkin[4].

Integral geometriya quyidagilarda faol qo‘llaniladi:

-tibbiy vizualizatsiya (kompyuter va magnit-rezonans tomografiya), radiofizika (interferometriya va signallarni rekonstruksiya qilish), geofizika (seysmik tomografiya), tasvirlarga ishlov berish va timsollarni tanib olish.

Integral geometriyaning asosiy xususiyati bilvosita o‘lchovlar bilan ishlash imkoniyatidir: funksiya nuqtalarda noma’lum, ammo uning qism to‘plamlar bo‘yicha integrallari berilgan. Bu obyekt ichidagi fizik kattaliklarning tashqi ma’lumotlar bo‘yicha taqsimlanishini tiklash talab qilinadigan ko‘plab teskari masalalarning matematik asosini beradi [5].

Radon o‘zgarishi birinchi marta 1917-yilda Iogann Radon tomonidan kiritilgan va tomografik rekonstruksiya muammolari uchun poydevor bo‘lgan. U f (x,y) funksiyani s (koordinata boshidan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa) va θ (to‘g‘ri chiziqning og‘ish burchagi) parametrlari bilan berilgan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab f integralni ifodalovchi Rf (s,θ) funksiyaga akslantiradi.

Matematik jihatdan Radon almashtirishi quyidagicha aniqlanadi[6]:

$$\mathbf{Rf\,(s,\theta) = \int_{\infty}^{-\infty} f\,(s\cos\theta - \sin\theta, s\sin\theta + t\cos\theta)\,dt.}$$

Yoki buni to‘g‘ri chiziq bo‘ylab integrallash ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\mathbf{Rf(s,\theta) = \int_{L(s,\theta} f(x,y)\,ds,}$$

bu yerda L (s,θ) - R2 dagi xcosθ+ysinθ=s tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq
Radon almashtirishining asosiy xossalari:

To‘g‘ri chiziqlilik:

$$\mathbf{R(a\mathit{f}+bg)(s,\theta)=aR\mathit{f}(s,\theta)+bRg(s,\theta),}$$

ixtiyoriy a,b∈R, va f,g∈L^1 (R^2) funksiyalar uchun.

Berilgan Rf (s,θ) ga proyeksiyalar soni yetarli bo‘lganda mos keluvchi yagona f (x,y) funksiya mavjud.

R dan f ni tiklash imkonini beruvchi formulalar mavjud. Eng mashhuri filtrlangan teskari proyeksiya formulasidir[5]:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \int_0^{\pi} \big(Rf(s,\theta) * h(s)\big)|_{s=x\cos\theta+y\sin\theta}\, d\theta,}$$

bu yerda h (s) - filtrlash funksiyasi (ko‘pincha Rampa filtri ishlatiladi), yulduzcha esa o‘ramni bildiradi.

Fure almashtirishi bilan bog‘liqlik: Markaziy kesim teoremasi (Fourier Slice Theorem) proyeksiyadan Fure bir o‘lchovli almashtirishini tasdiqlaydi.

Rf (s,θ) funksiya f (x,y) funksiyaning θ yo‘nalishdagi ikki o‘lchovli Furye s almashtirishining kesimidir[2]:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}[Rf(s,\theta)](\omega) = [\mathcal{F}_{x,y}[f(x,y)](\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)].}$$

Ushbu xususiyatlar tibbiy va sanoat tomografiyasida keng qo‘llaniladigan tasvirlarni qayta tiklash algoritmlari uchun asos yaratadi.

Haqiqiy ilovalarda o‘lchash amalga oshiriladigan muhit bir jinsli bo‘lmasligi mumkin, bu esa trayektoriya bo‘ylab signalni qayd etish sharoitlarining o‘zgarishiga olib keladi. Bu muhitning o‘lchash natijasiga ta’sirini aks ettiruvchi w (x,y) vazn funksiyasini kiritish orqali modellashtiriladi.

Shu bilan birga, o‘lchangan Radon almashtirish quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\boldsymbol{Rf_{\omega}(s,\theta) = \int_{L(s,\theta)} f(x,y) * \omega(x,y)\,ds.}$$

Agar w (x,y) tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda integrallash natijasi ham tasodifiy bo‘ladi. Bunday holda, natijaning statistik xususiyatlarini ko‘rib chiqish kerak - masalan, matematik kutilma, dispersiya va korrelyatsiya xususiyatlari.

Stoxastik yondashuvda w (x,y) ni modellashtirish uchun ko‘pincha Gauss tasodifiy maydonidan foydalaniladi:

$$\mathbf{w(x,y) \sim N(\mu(x,y), \sigma^2(x,y)),}$$

bu yerda:

μ (x,y) - o‘rtacha qiymat (bashorat qilinadigan komponentani tavsiflaydi);

σ^2 (x,y) - dispersiya (noaniqlik darajasini xarakterlaydi).

Murakkabroq modellar fazoviy korrelyatsiyani o‘z ichiga olishi mumkin, masalan, eksponensial yoki asosiy kovariatsion yadro bilan:

$$Co\vartheta\left(\omega(x_1,y_2),\omega(x_2,y_2)\right)=\sigma^2 * \exp(\frac{\left\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\right\|}{l}$$

bu yerda l - korrelyatsiya uzunligi.

Amaliyot va tajriba-sinov natijalari

Dasturiy muhitda algoritmlarni amalga oshirish: Radon almashtirishining sonli xossalarini namoyish qilish va uning fundamental xarakteristikalari - **chiziqlilik, inyektivlik** va **Fure** almashtirishi bilan bog‘liqligini tahlil qilish uchun Python tilida dasturiy ta’minot ishlab chiqildi [7]. Amalga oshirishda **scikit-image**, **numpy** va **matplotlib** kutubxonalaridan foydalanildi. Sinov tasviri sifatida standart Shepp-Logan fantomi qo‘llanildi, u inson boshi kesimini taqlid qiladi va ko‘pincha kompyuter tomografiyasi vazifalarida ishlatiladi.

Kiruvchi rasm sifatida quyidagi chaqiruv ishlatilgan:

```
img = shepp_logan_phantom()
analyzer = RadonFourierAnalyzer(img)
analyzer.check_linearity()
analyzer.check_injectivity()
analyzer.show_fourier()
analyzer.visualize_all()
```

Natijalar tahlili: Hisoblash natijalari Radon almashtirishining nazariy xossalarini tasdiqlaydi:

-Sonli tajriba ikki tasvir proyeksiyalarining yig‘indisi ularning yig‘indisi proyeksiyasi bilan ustma-ust tushishini ko‘rsatdi. Xatolik 10^{-13} tartibida bo‘lib, bu usulning yuqori sonli barqarorligini ko‘rsatadi.

-sinogrammadan boshlang‘ich tasvirni teskari Radon usuli bilan qayta tiklashda tiklashning o‘rtacha kvadratik xatosi 3 dan kam bo‘ldi (L_2 me’yorida), bu esa yetarli miqdordagi proyeksiyalar mavjud bo‘lganda boshlang‘ich funksiyani tiklash imkoniyatini tasdiqlaydi.

-Fure almashtirishi bilan bog‘liqlik: to‘g‘ridan-to‘g‘ri ikki o‘lchovli Fure almashtirishi yordamida spektrni vizuallashtirish fantomning chastotaviy ko‘rinishi past chastotali sohada to‘planganligini tasdiqlashga imkon berdi, bu markaziy kesim teoremasiga (Fourier Slice Theorem) mos keladi.

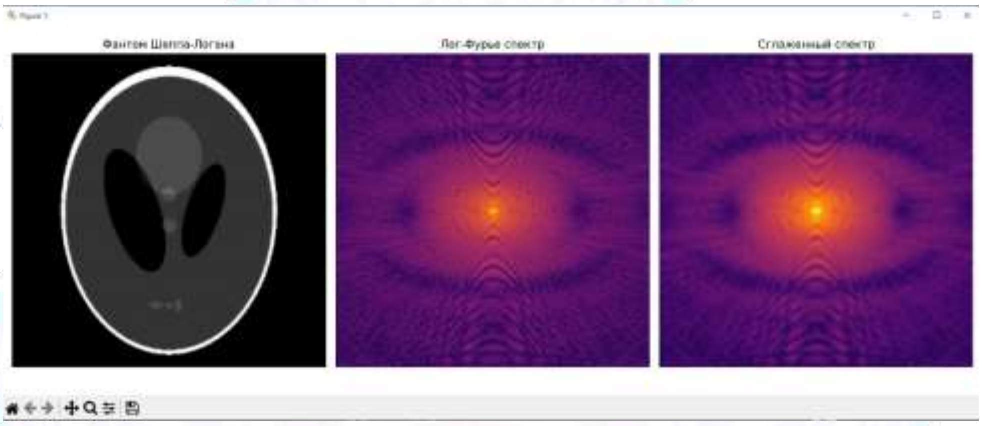
Tasvirlash

Grafik natijalarga quyidagilar kiradi:

- Fantomning asl tasviri;

- Radonning to‘g‘ri almashtirishini qo‘llashdan keyin olingan sinogramma;
- Tiklangan tasvir;
- Spektral tasvir (logarifmik shkaladagi tasvirning Fure obrazi moduli).

Ushbu natijalar ishlab chiqilgan yondashuvning ham raqamli, ham vizual nuqtayi nazardan samaradorligini ko‘rsatadi.[1-rasm]



1-rasm Grafik natija

Umumiy xulosalar: Ushbu tadqiqot integral geometriya va Radon almashtirishining stoxastik yondashuvlarini rivojlantirishga bag‘ishlangan bo‘lib, real sharoitlarda ma’lumotlarni tahlil qilish va qayta ishlashning samarali usullarini ishlab chiqishga qaratilgan. Tadqiqotda ko‘rsatilganidek, ma’lumotlardagi noaniqliklarni va shovqinlarni hisobga olish, ayniqsa, tasodifiy vazn funksiyalari yordamida, integral geometriya usullarining samaradorligini oshiradi.

Umuman olganda, ushbu tadqiqot integral geometriya, stoxastik modellashtirish va sonli metodlar sohasida yangi yondashuvlarni ishlab chiqish va amaliyotda qo‘llash imkoniyatlarini ochib beradi, bu esa ilmiy hamda sanoat amaliyotlarida yangi innovatsion yechimlarni taklif qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Кравченко, В. Ф., and В. И. Пустовойт. "Новый класс весовых функций и их спектральные свойства." *Доклады академии наук*. Vol. 386. No. 1. Федеральное государственное бюджетное учреждение" Российская академия наук", 2002.
2. Давыдочкин, Вячеслав Михайлович, and Светлана Вячеславовна Давыдочкина. "Весовые функции для адаптивного гармонического анализа сигналов с многомодовым спектром." *Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии* 19 (2006): 66-72.
3. Митрохин, С. И. (2018). Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией. *Известия высших учебных заведений. Математика*, (6), 31-47.

4. Илларионова, Г. И. "Технологический подход к формированию профессионально! математических компетенций специалистов инженерного профиля в вузе." *Ученые записки Российского государственного социального университета* 7-1 (2009): 14-19.
5. Давыдочкин, В. М., and С. В. Давыдочкина. "Весовые функции для цифрового адаптивного гармонического анализа сигналов с многомодовым спектром." *Радиотехника* 9 (2009): 11-20.
6. Занин, К. А., А. С. Митькин, and И. В. Москатиньев. "Методические основы моделирования информационного тракта космического радиолокатора синтезированной апертуры." *Вестник НПО им. СА Лавочкина* 2 (2016): 61-68.
7. Мухометов Р. Г. О задачах интегральной геометрии в области с отражающей частью границы //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1987. – Т. 296. – №. 2. – С. 279-283.