GILBERT FAZOSIDA ANIQLANGAN OPERATORLARNING SPEKTRI

Keldiyarova Sitora Bo‘ribekzoda
Oqoltin tumani 9-maktab o‘qituvchisi.
sitorakeldiyarova96@gmail.com
Usmonov Navruz Muzaffarovich
GulDU tayanch doktoranti.
navruzusmonov417@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur ish Gilbert fazolarida aniqlangan chiziqli operatorlarning spektral xossalariga bag‘ishlangan. Unda avvalo operatorning regulyar nuqtasi va uning rezolventasi tushunchalari keltirilib, ularning asosiy xususiyatlari tahlil qilingan. Shuningdek, operatorning spektri tushunchasi keng yoritilib, operatorning xos qiymatlari va xos vektorlariga oid ta’riflar, ularning mavjudligi va xossalari haqidagi asosiy teoremalar hamda ular uchun isbotlar keltirilgan. Maqolada spektral nazariyaning muhim natijalarini ifodalovchi teoremalarga misollar berilgan va ularning tatbiqiy jihatlari yoritilgan. Xususan, cheksiz o‘lchovli Gilbert fazolarida chiziqli operatorlarning xos qiymatlarini aniqlash usullari, ular yordamida differensial va integral operatorlarning spektrini tadqiq qilish imkoniyatlari ko‘rsatib o‘tilgan. Nazariy qism amaliy misollar bilan boyitilgan.

Kalit so‘zlar: Gilbert fazosi, chiziqli operator, regulyar nuqta, rezolventa, operatorning spektri, xos qiymat, xos vektor, spektral teorema.

H - Hilbert fazosi, $A: H \longrightarrow H$ biror chiziqli chegaralangan operator bo‘lsin.

Ta'rif 1.3.1 *Agar biror $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $A - \lambda I$ operator teskarilanuvchan bo‘lsa, u holda λ soni A operatorning* <u>*regulyar nuqtasi*</u>, *$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operator esa uning* <u>*rezolventasi*</u> *deyiladi.*

A operatorning barcha regulyar nuqtalari to‘plami $\rho(A)$ deb belgilanadi. $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ to‘plam A operatorning *spektri* deb ataladi. Demak spektr nuqtalari quyidagilardan iborat bo‘lishi mumkin:

1. $A - \lambda I$ operator umuman teskarilanuvchan emas. Demak $(A - \lambda I)x = 0$ tenglama nolmas yechimga ega. Bu holda λ soni A operatorning **xos qiymati,** nolmas x esa **xos vektori** deyiladi.

2. $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud, lekin chegaralanmagan. Bu holda λ soni A operatorning **uzluksiz spektriga tegishli** deyiladi.

3. $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud, chegaralangan, lekin ,$A - \lambda I$ ning qiymatlar sohasi butun fazoga teng emas. Bu holda λ soni **qoldiq spektrga tegishli** deyiladi.

A operatorning λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan hosil qilingan fazoning o‘lchami λ xos qiymatning **karraliligi** deyiladi. Agar λ ning karraliligi 1 ga teng bo‘lsa, u **oddiy xos qiymat**, aks holda **karrali xos qiymat** deb ataladi. A

operatorning chekli karrali xos qiymatlari to‘plamini **diskrit spektr** deb ataymiz va $\sigma_{disc}(A)$ deb belgilaymiz. A operatorning uzluksiz spektrini $\sigma_{cont}(A)$ deb, qoldiq spektrini esa $\sigma_{res}(A)$ deb belgilaymiz. Odatda operatorning uzluksiz spektri va cheksiz karrali xos qiymatlari to‘plami **muhim spektr** deb ataladi va $\sigma_{ess}(A)$ kabi belgilanadi. $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_{disc}(A)$

Teorema 1.3.1 *Ixtiyoriy chegaralangan A operatorning spektri yopiq to‘plam.*

Lemma 1.3.1 *A chegaralangan operator va $\| A \| < 1$ bo‘lsin. U holda $I - \lambda A$ operator teskarilanuvchan.*

Teoremaning isbotiga o‘tamiz. Ixtiyoriy $\lambda_0 \in \rho(A)$ ni qaraymiz. U holda quyidagi munosabat o‘rinli:

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = (A - \lambda_0)(I - (z - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A).$$

Endi λ ni shunday tanlash mumkinki,

$$|\lambda - \lambda_0| \, \| R_{\lambda_0}(A) \| < 1.$$

U holda lemmaga asosan $I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)$ teskarilanuvchan. λ_0 ning aniqlanishidan $A - \lambda_0 I$ teskarilanuvchan. U holda $A - \lambda I$ ham teskarilanuvchan bo‘ladi. Bu yerdan λ_0 o‘zining biror atrofi bilan $\rho(A)$ ga tegishli ekani, ya’ni uning ochiq ekanini hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Agar $|\lambda| > \| A \|$ bo‘lsa, $\| \lambda^{-1} A \| < 1$ bo‘ladi. U holda $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ ekanidan Lemmaga asosan $-\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ va demak $A - \lambda I$ teskarilanuvchan. Demak bu holda $\lambda \in \rho(A)$. Shunday qilib chegaralangan A operatorning spektri markazi 0 nuqtada bo‘lgan $\| A \|$ radiusli doira ichida to‘liq saqlanadi. Demak A chegaralangan bo‘lsa, $\rho(A)$ chegaralanmagan.

Misol 1. *Chekli o‘lchamli fazolarda ixtiyoriy operator faqat diskrit spektrga ega bo‘ladi, ya’ni faqatgina xos qiymatlargagina ega.*

Misol 2.

$A: \ell_2(\mathbb{Z}^d) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, $(Af)(n) = v(n)f(n)$, $f \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ *operatorni qaraymiz, bunda v aynan nol bo‘lmagan biror chegaralangan funksiya. M deb v ning qiymatlari to‘plamini belgilaymiz va $\sigma(A) = \overline{M}$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{M}$ ni qaraymiz. Bu to‘plam ochiq va $q = dist(\lambda, \overline{M}) > 0$ bo‘ladi. Bu holda $\forall f \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ uchun*

$$\| (A - \lambda I)f \|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |v(x) - \lambda|^2 |f(x)|^2 \geq q^2 \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |f(x)|^2 = q^2 \| f \|^2$$

bo‘lib, teoremaga asosan $A - \lambda I$ teskarilanuvchan bo‘ladi. Demak, $\sigma(A) \subset \overline{M}$. Endi $\lambda \in \overline{M}$ bo‘lsin. $Af = \lambda I$ tenglamani qaraymiz. Agar $\lambda \in M$ bo‘lsa, u holda bu tenglama nolmas yechimga ega bo‘ladi. Misol uchun, biror $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ uchun $\lambda = v(x_0)$ ni qarasak, u holda

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & agar \;\; x = x_0, \\ 0, & aks \;\; holda\,. \end{cases}$$

funksiya bu tenglamaning yechimi bo‘ladi. Bu yerdan z ning xos qiymatligi va f_{x_0} ning xos vektorligini topamiz. Demak $\lambda \in \sigma(A)$.

Endi $\lambda \in \overline{M}\backslash M$ bo‘lsin. U holda $A - \lambda I$ operator teskarilanuvchan, ya’ni $Af = \lambda f$ tenglama yagona 0 yechimga ega va rezolventa

$$(R_\lambda(A)f)(x) = \frac{f(x)}{v(x) - \lambda}$$

kabi aniqlanadi. $\lambda \in \overline{M}\backslash M$ ekanidan har bir $n \in N$ uchun shunday $x_n \in \mathbb{Z}^d$ topiladiki, $|v(x_n) - \lambda| < \frac{1}{n}$ bo‘ladi. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligini aniqlaymiz

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & agar \quad x = x_0, \\ 0, & aks \ holda\,. \end{cases}$$

U holda

$$\| R_\lambda(A)f_n \|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \frac{f_n(x)}{|v(x) - \lambda|^2} = \frac{f_n(x_n)}{|v(x_n) - \lambda|^2} > n^2.$$

Demak $R_\lambda(A)$ chegaralanmagan operator. Ta’rifga binoan $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Demak $\overline{M} \subset \sigma(A)$. Bu yerdan $\overline{M} = \sigma(A)$ ekani kelib chiqadi.

H Hilbert fazosi, $A \in L(A)$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

M va m sonlari mos ravishda A operatorning yuqori va quyi chegarasi deyiladi.

Teorema 1.3.2 $\| A \| = max\{|m|, |M|\}$.

Ma’lumki, $\sigma(A)$ $\| A \|$ radiusli doira ichida saqlanar edi. O‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar uchun esa bu baholash yanada aniqroq.

Teorema 1.3.3 $\sigma(A) \subset [m, M]$. *Shuningdek,* $m,\ M \in \sigma(A)$.

Natija 1.3.1. *Har qanday chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektri bo‘sh emas.*

Teorema 1.3.4 *A o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsin. λ soni A operator uchun xos qiymat bo‘lishi uchun $\overline{R(A - \lambda I)} \neq H$ bo‘lishi zarur va yetarli .*

Natija 1.3.2. *λ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiyalar fazosi $R(A - \lambda I)$ ning ortogonal to‘ldiruvchisidan iborat.*

O‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektrini quyidagicha tavsiflash ham mumkin: agar $R(A - \lambda I) \neq \overline{R(A - \lambda I)}$ bo‘lsa, λ soni A operatornng uzluksiz spektriga tegishli bo‘ladi va agar $\overline{R(A - \lambda I)} \neq H$ bo‘lsa, λ soni A operatorning nuqtali spektriga tegishlidir.

Teorema 1.3.5 *Faraz qilamiz, $A -$ H Hilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsin. U holda A qoldiq spektrga ega emas.*

H Hilbert fazosi, $A \in L(H) -$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsin.

Teorema 1.3.6 *Kompakt operatorning nolmas z xos qiymatiga mos keluvchi X_λ xos fazosi chekli o‘lchamli.*

Teorema 1.3.7 *Istalgan $\delta > 0$ son uchun kompakt operator xos qiymatlarining moduli δ dan katta boʻlganlari soni chekli.*

Bu teoremadan shuni xulosa qilamizki, kompakt operatorning xos qiymatlarini moduli boʻyicha kamayish tartibida joylashtirish mumkin.

Natija 1.3.1 *Kompakt operatorning xos qiymatlari toʻplami noldan farqli limitik nuqtaga ega emas.*

Teorema 1.3.8 (Phillips) *Agar $\lambda \in \mathbb{C}$ soni A kompakt operatorning xos qiymati boʻlsa, $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ soni A^* ning xos qiymati boʻladi.*

Teorema 1.3.9 *A va A^* kompakt operatorlarning z va $\overline{z}$ xos qiymatlariga mos keluvchi xos qism fazolarining oʻlchamlari teng.*

Teorema 1.3.10 *$A \in L(H) -$ kompakt operator boʻlsin. U holda*

1. A operatorning spektridagi noldan farqli ixtiyoriy nuqta xos qiymatdir;
2. Agar H cheksiz oʻlchamli boʻlsa, 0 soni operatorning spektriga tegishli.

Teorema 1.3.11 *Agar $A \neq 0$ oʻz - oʻziga qoʻshma va kompakt boʻlsa, uning hech boʻlmaganda bitta nolmas xos qiymati bor.*

Foydalanilgan adabiyotlar

1. M.I.Moʻminov, C.Lokman Finiteness of discrete spectrum of the two-particle Schödinger operatori on diamond lattices. Nanosystems; physics, chemistry matematics, 2017, 8(3), P. 310-316.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
3. Oʻktamova, S., & Usmonov, N. M. (2025). Gilbert fazosida chiziqli chegaralangan operatorlar. Экономика и социум, (7-1 (134)), 992-996.
4. Usmonov, N. M., & Usmonov, A. A. (2025). Gilbert fazosining asosiy xossalari va uning turli masalalarga tadbiqi. Экономика и социум, (6-2 (133)), 2080-2084.
5. Nafasov, G., Xudoyqulov, R., & Usmonov, N. (2023). Developing logical thinking skills in mathematics teachers through digital technologies. Евразийский журнал технологий и инноваций, 1(5 Part 2), 229-233.
6. *Usmonov, N. M. (2024). Maple paketi orqali oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarini yechish. Экономика и социум, (12-2 (127)), 928-935.*
7. *Муминов М.Э., А.М. Хуррамов А.М.* Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 177, №. 4. С. 102–110.
8. *Муминов М.Э.* О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. 2007. Т.153, №. 3. С. 381–387.
9. Usmonov, N. M. (2022). Kompleks argumentli trigonometrik va giperbolik funksiyalar. *Вестник магистратуры*, (6-3 (129)), 4-6.
10.