

AYRIM FUNKSIONAL TENGLAMALARNI YECHISH METODIKASI HAQIDA

Normurodov Sherzod Boymurodovich

Qarshi davlat texnika universiteti, stajyor o'qituvchi
normurodovsherzod873154@gmail.com

Annotatsiya. Hozirda jahonda olib borilayotgan ko'plab amaliy ishlar aksariyat hollarda bir o'zgaruvchili va ko'p o'zgaruvchili funksional tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Demak, agar biz funksional tenglamalarni yechimini topish uchun ko'plab qulay usullarni aniqlasak qo'yilgan masala hal qilish osonlashadi. Funksional tenglamalarni yechishning o'rniga qo'yish usuli, o'zgaruvchilarni almashtirish usuli, aniqlanmagan koeffitsiyentlar usuli, qiymatlarni o'zgaruvchilar bilan almashtirish usuli, matematik induksiya usuli, rekkurent munosabatlar hosil qilish usuli, funksiyani almashtirish shu kabi boshqa usullar mavjud bo'lib, biz ushbu maqolada yuqoridagi usullardan ba'zilarini keltirib o'tamiz. Shu o'rinda aytish mumkinki nostandart funksional tenglamalarni yechishning umumiy yo'li topilmagan. Ushbu ishdan funksional tenglamalarni yechishda akademik litseylar, kasb-hunar maktabi va shu jumladan oily o'quv yurtlari talabalari ham qo'shimcha manba sifatida foydalanishlari mumkin.

Kalit so'zlar: funksional tenglama, o'zgaruvchilarni almashtirish usuli, Koshi tenglamasi, nostandart, matematik induksiya, matematik induksiya.

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Абстракт. В настоящее время многие практические работы, проводимые в мире, в большинстве случаев приводят к решению функциональных уравнений с одним и многими переменными. Итак, если мы определим множество удобных методов поиска решения функциональных уравнений, задачу будет легче решить. Существуют и другие методы решения функциональных уравнений: метод замены, метод замены переменных, метод неопределенных коэффициентов, метод замены значений переменных, метод математической индукции, метод формирования рекуррентных соотношений, подстановка функций и т. д. Некоторые из вышеперечисленных методов мы упомянем ниже. Эта статья. Здесь можно сказать, что общего пути решения нестандартных функциональных уравнений не найдено. Учащиеся академических лицеев, профессиональных училищ, в том числе семейных образовательных учреждений

могут использовать данную работу как дополнительный ресурс для решения функциональных уравнений.

Ключевые слова: функциональное уравнение, метод замены переменных, уравнение Коши, нестандартность, математическая индукция, математическая индукция.

ON METHODS OF SOLVING SOME FUNCTIONAL EQUATIONS

Abstract. Currently, many practical works carried out in the world in most cases lead to solving functional equations with one and many variables. So, if we define many convenient methods for finding a solution to functional equations, the problem will be easier to solve. There are also other methods for solving functional equations: the replacement method, the variable replacement method, the method of undetermined coefficients, the method of replacing variable values, the method of mathematical induction, the method of forming recurrence relations, substitution of functions, etc. We will mention some of the above methods below. This article. Here we can say that a general way to solve non-standard functional equations has not been found. Students of academic lyceums, vocational schools, including family educational institutions can use this work as an additional resource for solving functional equations.

Keywords: functional equation, variable replacement method, Cauchy equation, non-standard, mathematical induction, mathematical induction.

Kirish va muammo bayoni. Matematikada ba'zi masalalarni yechish, ba'zi funksiyalarning xossalarini o'rganishda funksional tenglamalarga duch kelamiz. Shu sababdan funksional tenglamalarni yechish usullari va ularning yechimlarini o'rganish muhim amaliy ahamiyatga ega. Funksional analiz hozirgi zamon matematikasining muhim sohalaridan biridir. Funksional analizning asosiy vazifalariga funksional fazolarni bir necha o'zaro uzviy bog'langan turli matematik strukturalar, masalan, algebraik amallar, metrika, norma, skalyar ko'paytma, qisman tartib kiritilgan holda o'rganishdir.

Funksional tenglamalar bugungi kunda o'zbek matematik olimlari tomonidan katta qiziqish bilan o'rganilayotgan matematikaning bo'limlaridan biri hisoblaniladi.

Aqliy hujum metodlar haqida tushuncha. [6] "Aqliy hujum"- g'oyalarni generatsiya qilish usuli. Qatnashchilar birlashgan holda qiyin muammoni yechishga harakat qiladilar: uni yechish uchun shaxsiy g'oyalarni ilgari suradilar (generatsiya kiradi). U ishtirokchilarni o'z tasavvurlari va ijodlaridan foydalanishga rag'batlantiradi. "Aqliy hujum"ning vazifasi kichik guruhlar yordamida yangi- yangi g'oyalarni yaratishdir. Bu usul muammoni hal qilayotgan kishilarning ko'proq aql bovar qilmaydigan va hatto

fantastik g'oyalarni yaratishga undaydi. G'oyalar qancha ko'p bo'lsa. Ularning hech bo'lmaganda bittasi ayni muddao bo'lishi mumkin.

“Aqliy hujum”ning qoidalari:

1. Fikr va g'oyalar hech qanday cheklanmagan holda iloji boricha qattiqroq aytilishi lozim;
2. Bildirilgan fikr va g'oyalar takliflar berish to'xtatilmaguncha muhokama qilinmaydi, baholanmaydi;
3. Bildirilgan har qanday g'oya va fikrlar hisobga olinadi;
4. Qancha ko'p g'oya va fikrlar bildirilsa shuncha yaxshi;
5. Bildirilgan g'oya va fikrlarni to'ldirish va yanada kengaytirish mumkin;
6. Barcha aytilgan takliflar yozib boriladi;
7. Takliflarni bildirish uchun vaqt aniq belgilanadi.

“Aqliy hujum” metodi. Ayrim mashhur funksional tenglamalar. Quyda biz ba'zi bir “mashhur” funksional tenglamalardan ayirnlaini keltrib o'tamiz:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ – bu funksional tenglamaga Koshi tenglamasi deyiladi:

$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$ – bu funksional tenglamaga kvadratik tenglama yoki parallelogramm qoidasi deyiladi;

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ – bu funksional tenglamaga Yensen tenglamasi deyiladi;

$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x)$ – bu funksional tenglamaga Lobachevskiy tenglamasi deyiladi;

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ – bu funksional tenglamaga Dalamber tenglamasi deyiladi.

Teorema (Koshi tenglamasi). Agar f uzluksiz funksiya barcha $x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ni qanoatlantirsa, u holda $f(x) = cx$, bu yerda c – o'zgarmas son.

Xulosa. Agar f uzluksiz funksiya va barcha $x, y \in \mathbb{R}$ uchun,

(i) $f(x+y) = f(x)f(y)$ bo'lsa, u holda $f(x) = c^x$

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$ bo'lsa, u holda $f(x) = c \ln x$

(iii) $f(xy) = f(x)f(y)$ bo'lsa, u holda $f(x) = x^c$

bu yerda c – o'zgarmas son.

Misol. Agar $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uzluksiz, barcha $1 < x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. Berilgan tenglama $\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$ ga ekvivalent. Agar $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ deb belgilab olsak, u holda:

$$g(x) = c \ln x \text{ va } f(x) = xg(x) = cx \ln x \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

Misol. Quyidagi funksional tenglamani $f(x+a) = x^2 + 4x + 6$ yeching.

Yechish. Aytaylik, $t = x + 2$ bo'lsin, u holda $x = t - 2$, bundan

$$f(t) = (t - 2)^2 + 4(t - 2) + 6 = t^2 + 2.$$

Demak, $f(x) = x^2 + 2$ ga teng ekan.

Misol. Agar $3f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x$ bo'lsa, u holda $f(x)$ ni aniqlang?

Yechish. Quyidagicha belgilash kiritib olamiz $t = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{t}$. Natijada

$$3f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{4}{t}.$$

Demak,

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{4}{x}. \quad (1)$$

Berilganidan $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ni topib olib (1) ga keltirib qo'ysak

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4x - 3f(x)}{2}.$$

$$3 \frac{4x - 3f(x)}{2} + 2f(x) = \frac{4}{x}$$

tenglamani ikkala qismini ham $2x$ ga ko'paytiramiz natijada

$$12x^2 - 9xf(x) + 4xf(x) = 8$$

$$12x^2 - 5xf(x) = 8$$

Demak, $f(x) = \frac{12x^2 - 8}{5x} = \frac{12}{5}x - \frac{8}{5x}$.

Misol. Agar $af(x - 1) + bf(1 - x) = cx$ bo'lsa, bu yerda a, b, c – const, $f(x)$ ni ko'rinishini aniqlang?.

Yechish. Belgilash kiritib olamiz $x - 1 = t$ deb

$$af(t) + bf(-t) = c(1 + t)$$

$$af(x) + bf(-x) = c(1 + x) \quad (2)$$

Agar $-x = t$ deb belgilash olsak, natijada $x = -t$ $af(-t) + bf(t) = c(1 - t)$,

$$af(-x) + bf(x) = c(1 - x),$$

$$f(-x) = \frac{c(1 - x) - bf(x)}{a}.$$

Bu tenglikni (2) ga qo'ysak natijada

$$af(x) + b \frac{c(1 - x) - bf(x)}{a} = c(1 + x).$$

Oxirgi tenglikni ikkala qismini a ga ko'paytirsak, natijada

$$a^2f(x) + bc(1 - x) - b^2f(x) = ac(1 + x)$$

$$f(x)(a^2 - b^2) = ac(1 + x) + bc(1 + x)$$

$$f(x)(a - b)(a + b) = (1 + x)(b + a)c$$

$$f(x) = \frac{c(1 + x)}{a - b}.$$

Misol. Quyidagi $xf(x) + 2xf(-x) = -1$ funksional tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ ni toping?

Yechish. Agar $t = -x$ deb olsak u holda $x = -t$ bo'ladi. Natijada

$$\begin{aligned} -tf(-t) - 2tf(t) &= -1. \\ -xf(-x) - 2xf(x) &= -1 \end{aligned} \quad (3)$$

bo'ladi.

Tenglamani berilishidan $f(-x)$ ni topib, (3) ga qo'yamiz

$$\begin{aligned} 2xf(-x) &= -1 - xf(x), \\ f(-x) &= \frac{-1 - xf(x)}{2x}, \end{aligned}$$

$-x \frac{-1 - xf(x)}{2x} - 2xf(x) = -1$, tenglamani ikkkala qismini 2 ga ko'paytiramiz

$1 + xf(x) - 4xf(x) = -2$. Natijada $f(x) = \frac{1}{x}$ tenglik hosil bo'ladi.

O'rniga qo'yish usuli. Bu usulning mohiyati quyidagicha. Berilgan tenglamada x (yoki y) ga turli almashtirishlarni qo'llab hamda hosil bo'lgan tenglamani dastlabki tenglama bilan taqqoslab, izlanayotgan funksiyaga nisbatan algebrik tenglama hosil qilinadi.

Misol. Quyidagi funksional tenglamani yeching:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x.$$

Yechish. Agar $z = \frac{x-2}{x+1}$ deb belgilab olsakolsak, u holda $x = \frac{z+2}{1-z}$ ($z \neq 1, z \neq 0$).

Natijada

$$f\left(\frac{1}{z}\right) + 2f(z) = \frac{z+2}{1-z} \quad (4)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Endi z ni $\frac{1}{z}$ ga almashtirib

$$f(z) + 2f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1+2z}{z-1} \quad (5)$$

Tenglikni hosil qilamiz. (4) va (5) tengliklardan $f(z)$ ni topamiz:

$$f(z) = \frac{4z+5}{3(1-z)},$$

ya'ni

$$f(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}.$$

Misol. Tenglamani yeching:

$$2f(x+y) + f(x-y) = f(x)(2e^y + e^{-y}).$$

Yechish. Quyidagi:

$$x=0, y=t;$$

$$x=t, y=2t;$$

$$x = t, y = -2t$$

almashtirishlarni olib ushbu

$$2f(t) + f(-t) = f(0)(2e^t + e^{-t});$$

$$2f(3t) + f(-t) = f(t)(2e^{2t} + e^{-2t});$$

$$2f(-t) + f(3t) = f(t)(2e^{-2t} + e^{2t})$$

tenglamalarni hosil qilamiz, bunda $a = f(0)$.

Agar bu tenglamani $f(-t)$ va $f(3t)$ larga nisbatan yechamiz. Buning uchun birinchi tenglikni -3 ga ko'paytirib ikkinchi tenglikni qo'shib, hosil bo'lgan tenglikdan uchinchi tenglikning ikkilanganini ayiramiz. Natijada:

$$6f(t) = 3a(2e^t + e^{-t}) - 3f(t)e^{-2t},$$

ya'ni

$$f(t) = a \cdot \frac{2e^t + e^{-t}}{2 + e^{-2t}} = a \cdot e^t.$$

Bu tenglik dastlabki tenglamani qanoatlantirishini osongina tekshirish mumkin:

$$2ae^{x+y} + ae^{x-y} = a \cdot e^x(2e^y + e^{-y}).$$

Funksional tenglamalarni yechishning boshqa usullariga misollar

Misol. Barcha $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ funksiyalarni toping, bunda

$$f(1) = 2 \text{ va } f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

Yechish. Bu matematik induksiya usulida yechish mumkin bo'lgan qadimiy masalalardan biridir. Agar berilgan tenglamada $x = 1$ va $y = n$ ni qo'ysak, $f(n+1) = f(n) + 1$ ga ega bo'lamiz va $f(1) = 2$ dan boshlab har bir n natural son uchun $f(n) = n + 1$ ga egamiz. Shunga o'xshash $x = 0$ va $y = n$ uchun $f(0)n = f(n) - 1 = n$, $f(0)$ ga ega bo'lamiz. Hozir maqsad har bir $z \in \mathbb{Z}$ uchun $f(z)$ ni topish shart. Berilgan tenglamaga $x = -1$ va $y = 1$ o'zgarish kiritsak, $f(-1) = 0$ bo'ladi. Bu holatda $x = -1$ va $y = n$.

$f(-n) = -f(n-1) + 1 = -n + 1$ ni beradi. Bundan har bir $z \in \mathbb{Z}$ uchun $f(z) = z + 1$. Hozir $f(\frac{1}{n})$ ni topishimiz kerak. $x = n$ va $y = \frac{1}{n}$ ni qo'ysak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(1) = (n+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1. \quad (6)$$

$x = 1$ va $y = m + 1$ dan foydalansak, $f\left(m + 1 + \frac{1}{n}\right) = f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1$ ga ega bo'lamiz. Bundan matematik induksiya metodini qo'llab $f\left(m + \frac{1}{n}\right) = m + f\left(\frac{1}{n}\right)$ ni topamiz. (6) ga ko'ra istalgan natural n son $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$ bo'ladi. Bundan tashqari $x = m$ va $y = \frac{1}{n}$ uchun $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$ ga yoki $f(r) = r + 1$ ga ega bo'lamiz. Istalgan r – musbat ratsional son uchun $x = -1$ va $y = r$ holatda

$f(-r) = -f(r-1) + 1 = -r + 1$ bo'ladi. Xuddi shunday har bir $x \in \mathbb{Q}$ uchun $f(x) = x + 1$ kelib chiqadi.

Eslatma. $xy + 1 = (x+1)(y+1) - (x+y+1) + 1$ dan boshlab barcha $x, y \in \mathbb{Q}$ lar uchun tenglamaning yechimi.

Misol. $g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$. Tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyalarni toping, bu yerda x va y haqiqiy sonlar.

Yechish. Berilgan funksiyaning $g(x) = 0$ va $g(x) = 2$ qiymatlarida tenglik o'rinli ekanligini ko'rish mumkin. Matematik induksiya metodidan foydalanib buni isbotlash oson, agar g funksiya bu ikki funksiyadan biriga teng bo'lmasa, u holda barcha x ning ratsional qiymatlarida $g(x) = x$ bo'ladi,

Xuddi shu kabi $g(r+x) = r + g(x)$ va $g(rx) = rg(x)$ oson ko'rish mumkin, bunda r –ratsional son va x –haqiqiy son. Ayniqsa ikkinchi tenglamadan $r = -1$ uchun $g(-x) = -g(x)$ ga ega bo'lamiz. Bundan holatda $y = -x$ ekanligidan $g(x)^2 = g(x^2)$ bo'ladi. Aytaylik, $g(x) < x$ deb faraz qilaylik. $g(x) < r < x$ bo'ladigan $x \in \mathbb{Q}$ ni tanlab olamiz. U holda

$$r > g(x) = g(x-r) + r \geq r,$$

qarama-qarshilikka duch kelamiz. Xuddi shunday $g(x) > x$ dan boshqa qarama-qarshilikka ega bo'lamiz. Shu tarzda har bir $x \in \mathbb{R}$ uchun $g(x) = x$ ga ega bo'lishimiz shart. Bu uchta funksiyalar berilgan funksional tenglamani qanoatlantiradi.

Misol. Ushbu

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (7)$$

tenglamani yeching.

Yechish. (7) tenglamadan $y = x, 2x, 3x, \dots$ deb olib, matematik induksiya bo'yicha quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} f(2x) = f^2(x) \\ f(3x) = f^3(x) \\ \dots \\ f(nx) = f^n(x). \end{cases} \quad (8)$$

Agar hosil bo'lgan tengliklarda $x = 1$ deb olinsa, u holda

$$f(n) = f^n(1)$$

tenglik hosil bo'ladi. Agar $f(1) = C_1$ desak, u holda barcha $x \in \mathbb{N}$ lar uchun $f(x) = C_1^x$ ni hosil qilamiz. Agar (8) tenglikda $x = \frac{m}{n}$ deb olinsa u holda

$$f(m) = f^n\left(\frac{m}{n}\right) = C_2^m$$

hosil bo'ladi, bundan esa

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = C_2^{\frac{m}{n}}$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, $x \in Q$ lar uchun berilgan tenglamani yechimi $f(x) = C^x$ ga teng bo'ladi. $f(\cdot)$ ni uzluksiz funksiya deb faraz qilib barcha $x \in R, x > 0$ larda $f(x) = C^x$ ekanligini hosil qilamiz.

Agar (7) tenglikda $x = 0$ deb olinsa, u holda

$$f(y) = f(0) \cdot f(y)$$

tenglikni ya'ni $f(y) = 0$ yoki $f(0) = 1 = C^0$ hosil qilamiz.

Endi (7) tenglikda $y = -x$ deb olib,

$$f(0) = f(-x) \cdot f(x),$$

$$1 = f(-x) \cdot f(x),$$

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{C^x} = C^{-x}$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in R$ uchun $f(x) = C^x$ berilgan tenglamani yechimi bo'ladi.

Xulosa.

Ushbu maqolada funksional tenglamalarni yechishning bir nechta usullari qarab chiqildi. Bu ishdan umumiy o'rta ta'lim maktablari o'quvchilarini matematika fani bo'yicha fan olimpidalariga tayyorlashda foydalanish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Смышляев В. К., Практикум по решению задач школьной математики // Выпуск V, Москва "Просвещение", 1978 г, ст.,36-39.
2. Aczel J., Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York, Birkhauser, 1966, pp.,98-102.
3. Aczel J., Dhombres J., Functional Equations Containing Several Variables. 1985, pp.,46-53.
4. Kuczma M., Choczewski B., Ger R., Iterative Functional Equations.
5. Notes on Functional Equations, by Mr. Kwok Ka Keung.
6. Jumayev M.E, Boshlang'ich sinflarda matematikadan laboratoriya mashg'ulotlarini tashkil etish metodikasi. Toshkent. "Yangi asr avlodi" 2006 yil. 256 b.
7. Sahoo P. K., Kannappan P., Introduction to Functional Equations.
8. Carlitz L., A special functional equation, Univ.Beograd, Publ.Electrotehn, Fak.Ser.Mat.Fiz, 1963 y.
9. Chaundy T. W. – McLeod J. B., On a functional equation, Quart.J.Math, Ocford, 1958, pp.,202-206.