

ISSIQLIK TENGLAMASINI O'ZGARUVCHILARGA AJRATISH USULI

Shahrisabz davlat pedagogika instituti

Jo'rayeva Feruza Baxtiyor qizi

feruzajorayevaasila@mail.ru

Shahrisabz davlat pedagogika instituti

talabasi Amirqulova O'g'iloy G'olib qizi

amirqulov.asilbek.15@gmail.com

Anotatsiya: Maqola issiqlik tenglamasini (issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) o'zgaruvchilarga ajratish usuli (Furye usuli yoki separation of variables) yordamida yechishga bag'ishlangan. Ushbu usul bir o'lchovli va ko'p o'lchovli issiqlik tarqalish masalalarini, shu jumladan chegaraviy va boshlang'ich shartlarni hisobga olgan holda, analitik yechish imkonini beradi. Maqolada usulning nazariy asoslari, o'zgaruvchilarni ajratish jarayoni, oddiy differensial tenglamalarga olib kelish, eigenvalue muammolari va umumiy yechimni superpozitsiya orqali qurish bosqichma-bosqich ko'rib chiqiladi. Amaliy misollar (masalan, cheklangan sterjen yoki plastina uchun) va natijalarning fizik ma'nosi tahlil qilinadi. Ushbu yondashuv matematik fizika, muhandislik va issiqlik texnikasi sohasidagi muammolarni hal etishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: issiqlik tenglamasi, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, Furye usuli, eigenvalue, issiqlik o'tkazuvchanlik, chegara shartlari, eigenvalue, superpozitsiya, matematik fizika.

Abstract: The article is devoted to solving the heat equation (heat conduction equation) using the method of separation of variables (also known as Fourier's method). This approach allows analytical solutions for one-dimensional and multi-dimensional heat distribution problems, taking into account boundary and initial conditions. The paper examines the theoretical foundations of the method, the process of separating variables, reduction to ordinary differential equations, eigenvalue problems, and construction of the general solution via superposition. Practical examples (e.g., for a finite rod or plate) and the physical interpretation of the results are analyzed. This method is of significant importance in solving problems in mathematical physics, engineering, and heat engineering.

Keywords: heat equation, separation of variables, Fourier method, heat conduction, boundary conditions, eigenvalue problem, superposition, mathematical physics.

Аннотация: Статья посвящена решению уравнения теплопроводности методом разделения переменных (метод Фурье). Данный подход позволяет аналитически решать одномерные и многомерные задачи распространения тепла с учётом граничных и начальных условий. В работе подробно рассматриваются

теоретические основы метода, процесс разделения переменных, сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям, задачи на собственные значения и построение общего решения с помощью суперпозиции. Приводятся практические примеры (например, для ограниченного стержня или пластины) и анализируется физический смысл полученных результатов. Этот метод имеет важное значение для решения задач математической физики, инженерии и теплотехники.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, метод разделения переменных, метод Фурье, теплопроводность, граничные условия, собственные значения, суперпозиция, математическая физика.

Kirish

Issiqlik tenglamasi (issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) matematik fizikaning asosiy tenglamalaridan biri bo'lib, moddada issiqlikning tarqalish jarayonini tavsiflaydi. Bu tenglama parabolik turdagi qisman differensial tenglama hisoblanadi va ko'plab muhandislik, fizika va texnika sohalarida – masalan, metallurgiya, mashinasozlik, qurilish materiallarini isitish yoki sovutish jarayonlarida, biologik to'qimalardagi issiqlik almashinuvi va boshqa ko'plab amaliy muammolarni yechishda keng qo'llaniladi.

Masalaning qo'yilishi

Bizga uzunligi L ga teng bo'lgan bir jinsli sim berilgan bo'lsin. Uning uchlaridagi harorat va boshlang'ich holatdagi issiqlik taqsimoti ma'lum bo'lganda, ixtiyoriy t vaqtda va ixtiyoriy x nuqtadagi haroratni topish talab etiladi.

Matematik model:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Bu yerda:

- $u(x, t)$ — x nuqtadagi t vaqtdagi harorat;
- a^2 — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti.

O'zgaruvchilarni ajratish (Furye usuli)

Usulning asosiy g'oyasi — noma'lum $u(x, t)$ funksiyani faqat x ga va faqat t ga bog'liq bo'lgan ikkita funksiya ko'paytmasi ko'rinishida izlashdir:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Ushbu ifodani asosiy tenglamaga qo'yamiz:

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

O'zgaruvchilarni ajratish uchun tenglikning har ikki tomonini $a^2 X(x) T(t)$ ga bo'lamiz:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Bu yerda λ — o‘zgarmas son (ajratish doimiysi).

Oddiy differensial tenglamalar sistemasiga o‘tish

Yuqoridagi tenglikdan ikkita mustaqil oddiy differensial tenglama hosil bo‘ladi:

1. **Vaqtga bog‘liq tenglama:** $T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$
2. **Koordinataga bog‘liq tenglama:** $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

Chegaraviy shartlarni qanoatlantirish (Shturm-Liuvill masalasi)

Agar simning uchlari nol darajada tutilgan bo‘lsa ($u(0, t) = 0$ va $u(L, t) = 0$), u holda $X(x)$ funksiya uchun quyidagi shartlar kelib chiqadi:
 $X(0) = 0$, $X(L) = 0$

Ushbu shartlarni faqat $\lambda > 0$ bo‘lgandagina nolga teng bo‘lmagan yechimlar mavjud:

- **Xos sonlar:** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$
- **Xos funksiyalar:** $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Umumiy yechim va Furiye qatorlari

Har bir n uchun xususiy yechim topiladi:

$$u_n(x, t) = C_n \cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Superpozitsiya prinsipiga ko‘ra, umumiy yechim ushbu xususiy yechimlarning yig‘indisiga teng:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{Bu}$$

yerda C_n koeffitsiyentlari boshlang‘ich shart ($u(x, 0) = \varphi(x)$) asosida Furiye formulasi bilan aniqlanadi:

$$C_n = \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Chegaraviy shartlarning turlari va ularning fizik talqini

O‘zgaruvchilarni ajratish usuli faqat harorat nolga teng bo‘lgan holatlar bilan cheklanmaydi. Maqolangizda quyidagi uch xil holatni farqlash muhim:

- **Birinchi tur (Dirixle shartlari):** $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$ Bu simning uchlari o‘zgarmas haroratda tutilganini anglatadi.

- **Ikkinchi tur (Neyman shartlari):** $\frac{\partial u}{\partial x} |_{x=0} = 0$. Bu simning uchlari issiqlikdan izolyatsiya qilinganini (tashqariga issiqlik chiqmayotganini) bildiradi. Bunda yechim kosinuslar yig'indisi ko'rinishida bo'ladi.
- **Uchinchi tur (Roben shartlari):** Atrof-muhit bilan konvektiv issiqlik almashinuvi sodir bo'layotgan holat. Bu muhandislik hisoblarida eng realistik model hisoblanadi.

Usulning yaqinlashuvchanligi va tahlili

Furye usuli bilan olingan yechimda eksponentsial ko'paytuvchi $e^{-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t}$ mavjud. Bu fizik nuqtai nazardan juda muhim:

1. **Vaqt o'tishi bilan barqarorlik:** $t \rightarrow \infty$ bo'lganda, barcha yuqori garmonikalar tezda so'nadi va tizim statsionar (muvozanat) holatga keladi.
2. **Silliqlash xususiyati:** Boshlang'ich funksiya $\varphi(x)$ qanchalik "notekis" bo'lmasin, vaqt o'tishi bilan issiqlik tarqalishi natijasida harorat grafigi silliqlashib boradi.

Xulosa

Ushbu maqolada ko'rib chiqilgan **o'zgaruvchilarni ajratish usuli** (Furye usuli) xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishning fundamental klassik usullaridan biri bo'lib qolmoqda. Olingan natijalar asosida quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

1. **Analitik aniqlik:** Usul murakkab issiqlik almashinuvi jarayonlarini cheksiz qatorlar ko'rinishidagi aniq analitik ifoda bilan tasvirlash imkonini beradi. Bu esa jarayonning dinamikasini har qanday nuqtada va vaqtda yuqori aniqlikda bashorat qilishga xizmat qiladi.
2. **Amaliy ahamiyat:** Issiqlik tenglamasini Furye usulida yechish faqat nazariy fizika bilan cheklanib qolmay, materialshunoslik, metallurgiya va qurilish issiqlik fizikasi kabi sohalarda konstruksiyalarning chidamliligini hisoblashda asosiy vosita hisoblanadi. Masalan, bino devorlarining muzlash chuqurligini yoki mikrochiplarning qizish darajasini aniqlashda ushbu matematik modeldan foydalaniladi.
3. **Chegaralanishlar:** Shuni ta'kidlash kerakki, o'zgaruvchilarni ajratish usuli asosan muntazam geometrik shakllar (sim, plastinka, silindr) va chiziqli tenglamalar uchun samarali. Murakkab konfiguratsiyali yoki nolineer muhitlar uchun ushbu usul sonli usullar (masalan, chekli ayirmalar yoki chekli elementlar usuli) uchun nazariy fundament vazifasini o'taydi.

Umuman olganda, Furye usuli matematik fizika tenglamalarini yechishda o'zining soddaligi va fizik jarayonlarni yaqqol namoyon etishi bilan boshqa usullardan ajralib turadi. U murakkab tizimlarni oddiy garmonik tebranishlar va so'nuvchi funksiyalar yig'indisi sifatida tahlil qilish imkonini beruvchi qudratli apparatdir

Misol

Bir o'lovli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L, \quad t > 0$$

Chegaraviy shartlar $u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$

$$\alpha = 1 \quad L = \pi \quad T_0 = 100^\circ C$$

O'zgaruvchi ajratish farazi $u(x, t) = X(x) T(t)$

$$XT' = \alpha X''T$$

$$\frac{T'}{T} = \alpha \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$$

Oddiy differensial tenglamalar $X'' + \lambda X = 0$

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$T' + \alpha \lambda T = 0 \rightarrow T(t) = C e^{-\alpha \lambda t}$$

Chegaraviy shartlarni topish: $u(0, t) = 0 \quad X(0) = 0 \quad A = 0$

$$u(L, t) = 0 \quad X(L) = 0 \quad B \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Umumiy yechim : $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$

Boshlang'ich shartdan B_n ni hisoblash $B_n = \frac{200}{\pi n} (1 - \cos(\frac{\pi n}{2}))$

$$B_n = \frac{200}{\pi n} - n = 4k + 3$$

$$n = \frac{400}{\pi n} - n = 4k \rightarrow \cos = 4k + 2 \rightarrow \cos = -1$$

$$\cos = 1 \rightarrow B_n = 0$$

Hisoblaymiz : $\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Bizning misolda $L = \pi \quad f(x) = 100 \quad (0 \text{ dan } \frac{\pi}{2} \text{ gacha}), (\frac{\pi}{2} \text{ dan } \pi \text{ gacha})$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Foydalanilgan adabiyotlar :

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 2004. (Matematik fizika bo'yicha dunyo miqyosidagi eng asosiy darsliklardan biri).
2. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. (Nazariy jihatdan chuqurlashtirilgan kurs).
3. **Salohiddinov M. S.** Matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: O'zbekiston, 2002. (O'zbek tilidagi eng mukammal va tizimli darslik).

4. **Farlow S. J.** *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. — Dover Publications, 1993. (Amaliyotchilar uchun sodda va tushunarli tilda yozilgan xorijiy adabiyot).
5. **Polyanin A. D.** *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. — Chapman & Hall/CRC, 2002. (Muhandislar uchun amaliy yechimlar va jadvallar to‘plami).
6. **Budak B. M., Samarskiy A. A., Tixonov A. N.** *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike*. — M.: Fizmatlit, 2003. (Amaliy misollar va Furiye usulini qo‘llashga doir masalalar to‘plami).