O’NG TOMONI MAXSUS KO’RINISHDA BO’LGAN CHIZIQLI O’ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI DEFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH

Shahrisabz davlat pedagogika instituti
Jo’rayeva Feruza Baxtiyor qizi
feruzajorayevaasila@mail.ru
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
talabasi ***Boyg’uziyeva Shukrona Xasanovna***
hasanovnashukrona@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada o’zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini, xususan, o’ng tomoni maxsus ko’rinishga (eksponenta, ko’phad, sinus va kosinuslar kombinatsiyasi) ega bo’lgan holatlarni yechish usullari tahlil qilinadi. "Aniqmas koeffitsiyentlar usuli"ning algoritmi va rezonans holatlari batafsil yoritiladi.

Kalit so‘zlar: Differensial tenglamalar sistemasi, o‘ng tomoni maxsus ko‘rinishdagi funksiyalar, aniqmas koeffitsiyentlar usuli, xususiy yechim, rezonans, xarakteristik tenglama.

Abstract: This article analyzes methods for solving systems of linear differential equations with constant coefficients, particularly for cases where the non-homogeneous term (right-hand side) has a special form (combinations of exponentials, polynomials, sines, and cosines). The algorithm of the "method of undetermined coefficients" and the conditions for resonance are discussed in detail.

Keywords: System of differential equations, functions of special form, method of undetermined coefficients, particular solution, resonance, characteristic equation.

Аннотация: В данной статье анализируются методы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в частности, для случаев, когда правая часть имеет специальный вид (комбинации экспонент, многочленов, синусов и косинусов). Подробно освещается алгоритм «метода неопределенных коэффициентов» и условия возникновения резонанса.

Ключевые слова: Система дифференциальных уравнений, функции специального вида, метод неопределенных коэффициентов, частное решение, резонанс, характеристическое уравнение.

Kirish

Differensial tenglamalar sistemasi fizika, iqtisodiyot va muhandislikning ko'plab sohalarida jarayonlarni modellashtirish uchun xizmat qiladi. Ayniqsa, tashqi kuchlar (o'ng tomon) ma'lum bir matematik qonuniyatga bo'ysunganda, tizimning o'zini tutishi "maxsus ko'rinishdagi" yechimlarni talab qiladi.

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi — noma’lum funksiyalar va ularning hosilalari chiziqli holda qatnashgan tenglamalar majmuasidir.

Umumiy koʻrinishi:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Yoki matritsa koʻrinishda:

$$X' = AX + F(t)$$

Bu yerda:

- X — noma’lum funksiyalar vektori
- A — koeffitsiyentlar matritsasi
- $F(t)$ — tashqi ta’sir (erkin had)

Masalaning qoʻyilishi va dolzarbligi

Chiziqli differensial tenglamalar sistemalarini (DOTS) yechishda, agar oʻng tomon (erkin hadlar) ixtiyoriy koʻrinishda boʻlsa, koʻpincha **Lagranj usuli** (oʻzgarmaslarni variatsiyalash) qoʻllaniladi. Biroq, Lagranj usuli ko'p vaqt talab qiladigan integrallash jarayonlarini o'z ichiga oladi.

Agar oʻng tomon **maxsus koʻrinishda** boʻlsa, biz integrallashdan qochib, masalani **algebraik tenglamalar sistemasiga** keltirishimiz mumkin. Bu jarayon hisoblash samaradorligini 3-4 barobar oshiradi.

Bir jinsli va bir jinsli boʻlmagan sistemalar

1) Bir jinsli sistema

Agar $F(t) = 0$ boʻlsa:

$X' = AX$

Xususiyati:

- Doimo trivial yechim mavjud: $X = 0$
- Yechimlar superpozitsiya prinsipiga boʻysunadi

2) Bir jinsli boʻlmagan sistema

Agar $F(t) \neq 0$ boʻlsa:

$$X' = AX + F(t)$$

Xususiyati:

- Umumiy yechim:

$$X = X_{umumiy} = X_{bir\ jinsli} + X_{xususiy}$$

Oʻng tomoni maxsus koʻrinishda boʻlgan sistemalarni yechish

Agar oʻng tomon quyidagi koʻrinishda boʻlsa:

- $e^{\alpha t}$

- $\sin t$, $\cos t$
- ko‘phad (polinom)

unda **xususiy yechimni topish uchun maxsus usul (aniqlanmagan koeffitsiyentlar usuli)** qo‘llaniladi.

Misollar:

O’ng tomon	Xususiy yechim shakli
e^t	Ae^t
$\sin t$	$A\sin t + b\cos t$
t^2	$At^2 + Bt + C$

- Chiziqli differensial sistemalar — ko‘p o‘zgaruvchili differensial tenglamalar majmuasi
- Ular:
  - bir jinsli
  - bir jinsli bo‘lmagan ga bo‘linadi
- Maxsus o‘ng tomonlarda xususiy yechim **o‘xshash shaklda** olinadi
- Umumiy yechim = umumiy (bir jinsli) + xususiy yechim

1-MISOL

Sistema: $\begin{cases} x' = x + y + e^t \\ y' = x - y \end{cases}$

1-qadam: Umumiy yechim

$$x_{umumiy} = C_1 e^{\sqrt{2}t} v_1 + C_2 e^{\sqrt{2}t} v_2$$

2-qadam: Xususiy yechim

$$x_{xususiy}(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

3-qadam: Qo‘shish

$$x(t) = x_{umumiy} = C_1 e^{\sqrt{2}t} v_1 + C_2 e^{\sqrt{2}t} v_2 + \begin{pmatrix} -2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

4-qadam: Komponent ko‘rinishda

$$x(t) = x_{umumiy}(t) - 2e^t$$
$$y(t) = y_{umumiy}(t) - e^t$$

4.6. Agar boshlang‘ich shart berilsa

Masalan:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

Yakuniy yechimga qo‘yib:

C_1, C_2 topiladi

2-misol

Misol: $\begin{cases} x = x - y + cost \\ y = 2x - y + sint \end{cases}$ $\quad x = x - y \quad y = 2x - y$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$x = C_1 cost + C_1 sint \quad y = (C_1 - C_2)cost + (C_1 - C_2)sint$

$\begin{cases} x = t(Acost + Bsint) \\ y = t(Ccost + Dsint) \end{cases}$

$x = (Acost + Bsint) + t(-Asint + Bcost)$

$y = (Ccost + Dsint) + t(-Csint + Dcost)$

1. $B = A - C \Rightarrow C = A - B$

2. $-A = B - D \Rightarrow D = A + B$

1. $A = C + 1 \Rightarrow 1 = A + 1 \Rightarrow A = 0$

2. $C = A - B \Rightarrow C = 0 - 1 \Rightarrow C = -1$

$D = A + B \Rightarrow 1 = A + 1 \Rightarrow A = 0$

$C = A - B \Rightarrow C = 0 - 1 \Rightarrow C = -1$

$x = t(0 \cdot cost + 1 \cdot sint) = tsint \quad y = t(-1 \cdot cost + 1 \cdot sint) = t(sint - cost)$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 cost + C_2 sint + tsint \\ y(t) = (C_1 - C_2)cost + (C_1 + C_2)sint + t(sint - cost) \end{cases}$$

Xulosa

O'ng tomoni maxsus ko'rinishda bo'lgan differensial tenglamalar sistemasini yechishda eng muhim bosqich — bu yechimning shaklini to'g'ri taxmin qilishdir. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli murakkab integrallash jarayonlaridan qochishga va masalani chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirishga imkon beradi. Bu usul muhandislik hisob-kitoblarida, ayniqsa tebranishlar nazariyasida fundamental ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Salohiddinov M.S. "Differensial tenglamalar", Toshkent, 2012.
2. Pontryagin L.S. "Obyknovennye differentsialnye uravneniya", Moskva, 1982.
3. **Soatov Yo.U.** "Oliy matematika", 3-jild, Toshkent, "O'zbekiston", 1996. (Differensial tenglamalar va sistemalar bo'limi).
4. **Turdiyev X.X.** "Differensial tenglamalar", Toshkent, "Innovatsiya-Ziyo", 2021.
5. **Choriyev A., Ismoilov I.** "Differensial tenglamalardan misol va masalalar to‘plami", Toshkent, 2010.