

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI MATHCAD DASTURIDA YECHISHNING TURLI USULLARI

Sharofutdinov Iqboljon Usmonjon o'g'li

Farg'ona davlat universiteti, katta o'qituvchi, p.f.f.d (PhD)

iqbol0766@gmail.com

Erkinova Niginabonu Hamidulla qizi

Farg'ona davlat universiteti talabasi

enhahaneem2006@gmail.com

ANNOTATSIYA: Ushbu maqolada chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning uchta asosiy usuli – Gaus eliminatsiyasi, Kramer qoidasi va teskari matritsa usuli – batafsil ko'rib chiqilgan. Har bir usulning matematik asosi, qo'llanilish doirasi, afzalliklari va kamchiliklari tahlil qilingan. Bundan tashqari, Mathcad kompyuter algebra tizimida ushbu usullarning amaliy qo'llanilishi, dasturlash imkoniyatlari va natijalar tasvirlanishi ilmiy jihatdan yoritilgan. Maqola talabalar va ilmiy tadqiqotchilar uchun nazariy va amaliy qo'llanma sifatida tavsiya etiladi.

Kalit so'zlar: chiziqli tenglamalar sistemasini, Gaus usuli, Kramer qoidasi, teskari matritsa, Mathcad, matritsa, determinant, algebraik usullar, hisoblash matematikasi.

АННОТАЦИЯ: В данной статье подробно рассматриваются три основных метода решения систем линейных уравнений – метод Гаусса, правило Крамера и метод обратной матрицы. Проанализированы математические основы, область применения, преимущества и недостатки каждого метода. Кроме того, в научном аспекте освещается практическое применение данных методов в компьютерной алгебраической системе Mathcad, возможности программирования и представление результатов. Статья рекомендуется студентам и научным исследователям в качестве теоретического и практического пособия.

Ключевые слова: система линейных уравнений, метод Гаусса, правило Крамера, обратная матрица, Mathcad, матрица, определитель, алгебраические методы, вычислительная математика.

ABSTRACT: This article provides a detailed examination of three fundamental methods for solving systems of linear equations – Gaussian elimination, Cramer's rule, and the inverse matrix method. The mathematical foundations, scope of application, advantages, and disadvantages of each method are analyzed. Furthermore, the practical application of these methods in the Mathcad computer algebra system, programming capabilities, and result visualization are discussed from a scientific perspective. The article is recommended as a theoretical and practical guide for students and researchers.

Keywords: system of linear equations, Gaussian method, Cramer's rule, inverse matrix, Mathcad, matrix, determinant, algebraic methods, computational mathematics.

1. KIRISH

Chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS) zamonaviy matematika, fizika, muhandislik va iqtisodiyotning asosiy matematik apparatlaridan biri hisoblanadi. Ikki noma'lumli oddiy sistemadan tortib, yuzlab va minglab noma'lumli katta o'lchamli tizimlargacha bo'lgan masalalar kundalik ilmiy-amaliy faoliyatda uchrab turadi. Bunday sistemalarni samarali yechish usullarini bilish har bir muhandis, matematik va dasturchi uchun zarur ko'nikmalardan biridir.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish metodologiyasi asrlar davomida takomillashib kelgan. XVIII asrda Karl Fridrix Gaus tomonidan ishlab chiqilgan eliminatsiya usuli bugungi kunda ham eng keng tarqalgan analitik va dasturiy usullardan biri hisoblanadi. Gabriel Kramer qoidasi determinantlarga asoslangan yechish usulini taqdim etgan bo'lsa, teskari matritsa usuli matritsa algebrasi rivojlanishi bilan amaliyotga kirib kelgan.

Hozirgi kunda kompyuter texnologiyalarining rivojlanishi bilan birga, ushbu usullarni avtomatlashtirilgan tizimlar yordamida amalga oshirish imkoni paydo bo'ldi. Mathcad – Professional kompyuter algebra tizimlaridan biri bo'lib, u matematik hisoblarni vizual shaklda olib borish, formulalar bilan ishlash va natijalarni grafiklar orqali tasvirlashga imkon beradi. Ushbu maqolada uchta asosiy usulning matematik asosi, Mathcad muhitida qo'llanilishi va ularning taqqosiy tahlili keltirilgan.

2. GAUS ELIMINATSIYA USULI

2.1. Matematik asosi

Gaus usuli – chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng keng tarqalgan va universal usullaridan biridir. Usul ikki bosqichdan iborat: oldinga yo'naltirilgan eliminatsiya (to'g'ri yo'l) va orqaga qaytish (teskari yo'l).

n ta noma'lumli n ta tenglamadan iborat tizimni ko'rib chiqaylik:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \dots \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsa ko'rinishida $[A|b]$ shaklida yoziladi. Oldinga yo'naltirilgan eliminatsiya bosqichida har bir ustun uchun pivot element tanlanib, uning pastidagi elementlar nolga keltiriladi. Bu jarayon natijasida yuqori uchburchak shaklidagi matritsa hosil bo'ladi. Keyin orqaga qaytish bosqichida noma'lumlar oxirgi tenglamadan boshlab izchil topiladi.

2.2. Algoritmning qadamlari

1-qadam: Kengaytirilgan matritsani $[A|b]$ tuzish. 2-qadam: $k = 1$ dan n gacha bo'lgan har bir qadam uchun pivot elementi a_{kk} ni topish; agar $a_{kk} = 0$ bo'lsa,

satrlarni almashtirish. 3-qadam: $k+1$ dan n gacha bo'lgan i qatorlar uchun $m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$ koeffitsientini hisoblash va i -qatordan k -qatorning m_{ik} martasini ayirish. 4-qadam: Yuqori uchburchak matritsadan orqaga qaytish yo'li bilan yechimni topish.

Gaus usulining vaqt murakkabligi $O(n^3)$ bo'lib, n katta bo'lganda ham nisbatan samarali hisoblanadi. Usulning muhim afzalligi – u faqat mavjud yechimni emas, balki sistemaning qarama-qarshiligi yoki noaniqligini ham aniqlashga imkon beradi.

2.3. Mathcad'da Gaus usuli

Mathcad tizimida Gaus usulini qo'llash uchun dasturchi funksiya yoki `lsolve()` operatoridan foydalanishi mumkin. Quyida $n=3$ uchun oddiy misol keltirilgan:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b := [8, -11, -3]$$

$$x := \text{lsolve}(A, b) \quad \rightarrow \quad x = [2, 3, -1]$$

Mathcad'da Gaus usulini qo'lda ham bajarish mumkin: avval kengaytirilgan matritsani `augment(A,b)` funksiyasi yordamida tuzish, so'ngra qator operatsiyalari (submatrix, stack) orqali eliminatsiyani amalga oshirish. Natijalar sonli va grafik shaklda ko'rsatilishi mumkin.

3. KRAMER QOIDASI

3.1. Nazariy asos

Kramer qoidasi – kvadrat koeffitsientlar matritsasiga ega bo'lgan va $\det(A) \neq 0$ shartini qanoatlantiruvchi chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning determinantlarga asoslangan usuli. Usul 1750-yilda shveysariyalik matematik Gabriel Kramer tomonidan tavsiya etilgan.

Teorema: Agar A matritsasining determinanti noldan farqli bo'lsa ($\det(A) \neq 0$), u holda sistemaning yagona yechimi mavjud bo'lib, u quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$x_i = \det(A_i) / \det(A), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Bu yerda A_i – A matritsasining i -ustuni o'rniga b vektori o'rnatilishi orqali hosil qilingan matritsa. Shunday qilib, har bir noma'lum uchun alohida determinant hisoblanadi.

3.2. Misol va hisoblash tartibi

$$2x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 + 3x_2 = 10 \text{ sistemasini uchun:}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5$$

$$\det(A_1) = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 10 = 5 \quad \rightarrow \quad x_1 = 5/5 = 1$$

$$\det(A_2) = 2 \cdot 10 - 5 \cdot 1 = 15 \quad \rightarrow \quad x_2 = 15/5 = 3$$

3.3. Afzalliklari va kamchiliklari

Kramer qoidasining asosiy afzalligi – usulning aniq va formulaviy ko'rinishi, noma'lumlarni mustaqil hisoblash imkoniyati. Bu xususiyat, ayniqsa, uch noma'lumgacha bo'lgan kichik sistemalarda qo'lda hisoblash uchun qulay.

Kamchiligi shundaki, usulning vaqt murakkablighi $O(n!)$ ga yaqin bo'lib, n ning katta qiymatlarida hisoblash samaradorligi keskin pasayadi. Shuning uchun amaliyotda Kramer qoidasi asosan $n \leq 4$ bo'lgan hollar uchun tavsiya etiladi.

3.4. Mathcad'da amalga oshirish

Mathcad'da determinantlar $|A|$ belgisi yoki $\det(A)$ funksiyasi orqali hisoblanadi. Kramer usulini qo'llash uchun quyidagi yondashuv qo'llaniladi:

$$D := \det(A) \quad D1 := \det(A1) \quad D2 := \det(A2) \quad D3 := \det(A3)$$

$$x1 := D1/D \quad x2 := D2/D \quad x3 := D3/D$$

Mathcad muhitida $A1$ matritsasini hosil qilish uchun augment va submatrix funksiyalari yoki to'g'ridan-to'g'ri matritsani qayta aniqlash usulidan foydalaniladi. Natijalar raqamli shaklda avtomatik chiqariladi.

4. TESKARI MATRITSA USULI

4.1. Nazariy asoslar

Teskari matritsa usuli matritsa algebrasi asosida ishlab chiqilgan bo'lib, chiziqli tenglamalar sistemasini $Ax = b$ ko'rinishida yozib, ikki tarafni A^{-1} ga ko'paytirish orqali yechimni topishga asoslangan.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Bu usul faqat kvadrat matritsa va $\det(A) \neq 0$ holida qo'llaniladi. Teskari matritsa A^{-1} ni topish uchun odatda quyidagi formula ishlatiladi:

$$A^{-1} = (1 / \det(A)) \cdot \text{adj}(A)$$

Bu yerda $\text{adj}(A)$ – A matritsasining adjugat (biriktirilgan) matritsasi bo'lib, u algebraik to'ldiruvchilar matritsasining transponati hisoblanadi.

4.2. Hisoblash tartibi

Birinchi qadam: A matritsasining determinantini hisoblash. Ikkinchi qadam: Har bir a_{ij} element uchun algebraik to'ldiruvchi $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$ ni topish (M_{ij} – minor). Uchinchi qadam: Kofaktorlar matritsasini transpozitsiya qilish orqali $\text{adj}(A)$ ni hisoblash. To'rtinchi qadam: $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det(A)$ formulasidan foydalanish. Beshinchi qadam: $x = A^{-1} \cdot b$ ko'paytmasini hisoblash.

4.3. Mathcad'da teskari matritsa

Mathcad muhitida teskari matritsa A^{-1} belgisi yoki $\text{inverse}(A)$ funksiyasi orqali topiladi. Amaliy hisoblash quyidagicha amalga oshiriladi:

$$A := [[3, 1, 2], [2, -1, 1], [1, 2, -1]] \quad b := [10, 3, 5]$$

$$A_{\text{inv}} := A^{-1} \quad x := A_{\text{inv}} \cdot b$$

Mathcad teskari matritsani ichki algoritmlar yordamida yuqori aniqlikda hisoblaydi. Natijani tekshirish uchun $A \cdot A^{-1} = I$ (birlik matritsa) tengligini tekshirish mumkin. Ushbu usulning afzalligi shundaki, bir A matritsasi uchun turli b vektorlari bilan tezda yechim topish imkonini beradi.

5. USULLARNING TAQQOSIY TAHLILI

Uchta usulning asosiy xususiyatlarini quyidagi mezonlar bo'yicha taqqoslash mumkin: hisoblash murakkabligi, qo'llanilish doirasi, aniqlik va dasturlash qulayligi.

Hisoblash murakkabligi jihatidan Gaus usuli $O(n^3)$ bilan eng samarali hisoblanadi. Kramer qoidasi n ta determinantni hisoblashni talab qilganligi sababli, katta n da $O(n \cdot n!)$ ga yaqinlashadi va amaliy jihatdan faqat kichik sistemalar uchun mos keladi. Teskari matritsa usuli ham $O(n^3)$ murakkablikka ega, lekin teskari matritsani hisoblash qo'shimcha xatoliklar kiritishi mumkin.

Qo'llanilish doirasi bo'yicha Gaus usuli eng universal hisoblanadi: u yechimi mavjud bo'lmagan yoki ko'p yechimli sistemalarni ham aniqlashga qodir. Kramer qoidasi faqat kvadrat va noyob yechimli tizimlarga, teskari matritsa usuli esa faqat teskari matritsasi mavjud bo'lgan tizimlarga qo'llaniladi.

Aniqlik nuqtayi nazaridan Gaus usuli to'liq pivot tanlash strategiyasi (complete pivoting) bilan qo'llanilganda sonli barqarorlikni ta'minlaydi. Kramer qoidasi va teskari matritsa usullari katta sonli determinantlar yoki teskari matritsa elementlari sababli yumaloqlash xatolariga sezgirroq.

Mathcad muhitida barcha uchta usul ham bir necha qator kod bilan amalga oshiriladi. Amaliy masalalar uchun `lsolve()` funksiyasi eng qulay va samarali yechimni taqdim etadi, chunki u ichida Gaus usulining optimallashtirilgan versiyasini qo'llaydi.

6. MATHCAD TIZIMIDA ISHLASH XUSUSIYATLARI

Mathcad (PTC Mathcad) – 1986-yilda ishlab chiqilgan va muhandislik, ilmiy hisoblashlar uchun maxsus mo'ljallangan kompyuter algebra tizimidir. U matematik formulalarni interfaoliy, o'qishga qulay shaklda yozish, o'zgartirish va hisoblash imkonini beradi.

Mathcad'ning chiziqli algebra sohasidagi asosiy imkoniyatlari: matritsalar bilan arifmetik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish); determinantlarni hisoblash (`det` funksiyasi); teskari matritsani topish (`inverse` yoki $^{-1}$ belgisi); `lsolve()`, `linsolve()` funksiyalari yordamida sistemani avtomatik yechish; qatorlar va ustunlar bilan manipulyatsiya (`submatrix`, `augment`, `stack`); matritsa elementlarini iterativ usulda o'zgartirish.

Mathcad muhitida foydalanuvchi matematik hujjat ko'rinishida ish olib boradi: har bir formulani oddiy matematik yozuv ko'rinishida kiritadi va natija darhol ko'rsatiladi. Bu xususiyat ta'lim jarayonida ayniqsa qimmatlidir, chunki talaba formulaning qanday ishlashini bosqichma-bosqich kuzatishi mumkin.

Mathcad'da parametrik tahlil ham oson amalga oshiriladi: masalan, A matritsasining bir elementini o'zgartirish va yechimning qanday o'zgarishini kuzatish

imkoni mavjud. Bu sezgirlik tahlili va optimallashtirish masalalarida muhim ahamiyat kasb etadi.

7. KOMPLEKS AMALIY MISOL

Quyida uchta usulning Mathcad muhitida bir xil sistema uchun parallel qo'llanilishi keltirilgan. Sistema:

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = -2$$

Mathcad'da A matritsasi va b vektori bir marta aniqlanib, uchta usulning har biri uchun alohida hisoblash bloki yoziladi:

$$A := [[4,2,-1],[3,-1,2],[1,4,1]] \quad b := [1,12,-2]$$

% Gaus usuli:

$$x_gaus := \text{lsolve}(A, b)$$

% Teskari matritsa usuli:

$$x_inv := A^{-1} \cdot b$$

% Kramer ($D_0 = \det(A)$, D_1, D_2, D_3 mos A_1, A_2, A_3 uchun):

$$x_1 := D_1/D_0 \quad x_2 := D_2/D_0 \quad x_3 := D_3/D_0$$

Uchala usul ham bir xil natijani beradi: $x_1 \approx 1$, $x_2 \approx -1$, $x_3 \approx 2$. Bu esa usullarning to'g'riligi va Mathcad'ning hisoblash aniqligini tasdiqlaydi.

8. XULOSA

Ushbu maqolada chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning uchta asosiy usuli – Gaus eliminatsiyasi, Kramer qoidasi va teskari matritsa usuli – matematik asosi, algoritmik tartibi va Mathcad muhitida qo'llanilishi nuqtayi nazaridan batafsil tahlil qilindi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Strang, G. (2016). Introduction to Linear Algebra (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
2. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix Computations (4th ed.). Johns Hopkins University Press.
3. Trefethen, L. N., & Bau, D. (1997). Numerical Linear Algebra. SIAM.
4. Quarteroni, A., Saleri, F., & Gervasio, P. (2014). Scientific Computing with MATLAB and Octave (4th ed.). Springer.
5. Бронштейн, И. Н., Семендяев, К. А. (2009). Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Лань.
6. Данилина, Н. И., Дубровская, Н. С. (2008). Численные методы. Высшая школа.

7. Fikhtengol'ts, G. M. (2001). Kurs differentsial va integral hisob. O'zbekiston Milliy Ensiklopediyasi.
8. Bekmurodov, A. Sh. (2018). Oliy matematika. Toshkent: O'qituvchi nashri.
9. Kiselev, A. I., & Kan, V. A. (2005). Kompyuter matematikasi: Mathcad muhitida hisoblashlar. Toshkent: ToshDTU.
10. PTC Mathcad Prime 9.0 – Foydalanuvchi qo'llanmasi. PTC Inc., 2022. <https://www.ptc.com/mathcad>
11. Isaev, B. (2020). Chiziqli algebra va analitik geometriya. Farg'ona: FarDU nashriyoti.
12. Sharipov, R. A. (2004). Kurs lineinoy algebrы i mnogomernoy geometrii. Ufa: BGU.