

DISKRET VA UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLARNING TAQSIMOT FUNKSIYALARINI TADQIQ ETISH

Ashurov Bakhtiyor Iskandarovich

*Senior lecturer, Department of Higher Mathematics,
Samarkand Institute of Economics and Service.*

E-mail: ashurovbahtiyor8917@gmail.com

Rasulov Shamshod Fazliddin o'g'li

E-mail: @shamshodrasulov58@gmail.com

Annotatsiya

Mazkur maqolada diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari, ularning ehtimollik massasi va zichlik funksiyalari bilan bog'liqligi, matematik kutilma hamda dispersiya kabi asosiy statistik ko'rsatkichlar tizimli ravishda tahlil qilindi. Tadqiqotda ehtimollar nazariyasining rivojlanish bosqichlari, taqsimot funksiyasining nazariy mazmuni va amaliy modellashtirishdagi o'rni yoritildi. Diskret holatda $P(X = x_i) = p_i$, uzluksiz holatda esa $f(x) \geq 0$, $\int f(x)dx = 1$ va $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ munosabatlari ilmiy izohlandi. Natijalar qismida binomial va eksponensial taqsimotlar asosida amaliy hisob-kitoblar bajarilib, taqsimot funksiyalarining bosqichma-bosqich shakllanishi, ehtimolliklarning yig'ilishi va parametrlarning ta'siri jadval hamda grafiklar orqali ko'rsatildi. Muhokamada diskret va uzluksiz modeling yondashuvlari solishtirilib, ularning afzalliklari va cheklovlari muhim statistik xulosalar bilan mustahkamlandi. Tadqiqot natijalari ehtimollik nazariyasi, statistik tahlil va amaliy modellashtirishni o'qitish hamda qo'llashda foydali nazariy-uslubiy asos bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyasi, ehtimollik massasi, ehtimollik zichligi, matematik kutilma, dispersiya, binomial taqsimot, eksponensial taqsimot, statistik modellashtirish, ehtimollar nazariyasi.

ABSTRACT

This article provides a structured analysis of distribution functions of discrete and continuous random variables, their connection with probability mass and density functions, and the role of expected value and variance in statistical modelling. The study reviews the historical development of probability theory and clarifies the theoretical meaning of distribution functions in both discrete and continuous settings. In the discrete case, the relation $P(X = x_i) = p_i$ is discussed, while in the continuous case the conditions $f(x) \geq 0$, $\int f(x)dx = 1$, and $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ are interpreted within a unified framework. A practical section uses binomial and exponential examples to demonstrate step-by-step calculations, tabular summaries, and graphical representations of the distribution function. The discussion compares discrete and

continuous modelling approaches, highlighting their strengths and limitations in applied statistics. The paper is intended as a concise but scientifically grounded contribution for teaching, analytical modelling, and introductory research in probability and statistics.

KEYWORDS: random variable, distribution function, probability mass, probability density, expectation, variance, binomial distribution, exponential distribution, statistical modelling, probability theory.

KIRISH

1. Ehtimollar nazariyasi Bernulli tajribalari, Laplas klassik yondashuvi va Kolmogorov aksiomatikasi orqali shakllangan fundamental ilmiy yo‘nalish bo‘lib, u noaniqlikni miqdoriy ifodalashga xizmat qiladi. Tasodifiy miqdor tushunchasi shu nazariyaning markazida turadi va kuzatuv, tajriba hamda qaror qabul qilish jarayonlarida ehtimollik asosida ishlash imkonini beradi [1], [2].

2. Tasodifiy miqdorlarning ilmiy ahamiyati ularning diskret yoki uzluksiz tabiati bilan belgilanadi. Diskret miqdorlar sanaladigan natijalarni, uzluksiz miqdorlar esa oraliq qiymatlar to‘plamini tavsiflaydi. Shu bois ularning taqsimot funksiyalarini tahlil qilish sonli statistikadan tortib ishonchlilik nazariyasi, iqtisodiy modellashtirish va muhandislik hisoblarigacha bo‘lgan ko‘plab sohalarda muhimdir [3], [4].

Tadqiqotning dolzarbligi shundaki, taqsimot funksiyasi tasodifiy miqdorning butun ehtimollik mazmunini birlashtiruvchi umumiy tavsif bo‘lib, u empirik kuzatuvlarni nazariy model bilan bog‘laydi. Ayniqsa, katta hajmdagi ma‘lumotlar sharoitida diskret va uzluksiz taqsimotlarni birgalikda tahlil qilish, ularning parametrlarini solishtirish va ehtimolliklarning jamlanish qonuniyatlarini ko‘rsatish statistik modellashtirish sifatini oshiradi [5].

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR

3. Zamonaviy adabiyotlarda taqsimot funksiyasi tasodifiy miqdorlarning eng asosiy xossalaridan biri sifatida talqin qilinadi. Ross [1], Grimmett va Stirzaker [2], Papoulis va Pillai [3] hamda Casella va Berger [4] taqsimot funksiyasini ehtimollikni yig‘uvchi, monotondagi va o‘ngdan uzluksiz funksiya sifatida ta’riflaydi. Bu yondashuvda diskret miqdorlar uchun funksiya pog‘onali ko‘rinishda, uzluksiz miqdorlar uchun esa silliq ko‘rinishda ifodalanadi.

4. Diskret tasodifiy miqdor uchun ehtimollik massasi funksiyasi $P(X = x_i) = p_i$ tarzida yoziladi. Bu yerda x_i lar mumkin bo‘lgan alohida qiymatlar, p_i lar esa mos ehtimolliklar bo‘lib, ularning yig‘indisi birga teng bo‘ladi. Mazkur munosabat diskret taqsimotning asosiy tayanch nuqtasini beradi va hisoblashlarda bevosita qo‘llanadi.

5. Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun ehtimollik zichligi funksiyasi $f(x)$ bilan ifodalanadi. Uning asosiy shartlari $f(x) \geq 0$ va $\int f(x)dx = 1$ bo‘lib, bu shartlar zichlikning manfiy bo‘lmasligi hamda butun o‘q bo‘yicha jami ehtimollikning birga tengligini

bildiradi. Taqsimot funksiyasi esa $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ ko‘rinishida aniqlanadi va uzluksiz modelning ehtimollik mazmunini jamlaydi.

6. Matematik kutilma va dispersiya random o‘zgaruvchining markaziy joylashuv va tarqalish ko‘rsatkichlarini beradi. Diskret holatda $M(X) = \sum x_i p_i$ formulasi, umumiy holda esa $D(X) = M[(X - M(X))^2]$ formulasi ishlatiladi. Kutilma miqdorning o‘rtacha darajasini, dispersiya esa qiymatlarning shu o‘rtachadan qanchalik tarqalganini ko‘rsatadi.

Metodik jihatdan tadqiqot nazariy tahlil, taqqoslovchi yondashuv va amaliy hisob-kitoblarga tayandi. Birinchi bosqichda diskret va uzluksiz taqsimotlar bo‘yicha asosiy tushunchalar umumlashtirildi. Ikkinchi bosqichda binomial va eksponensial taqsimotlar tanlanib, ularning taqsimot funksiyalari, kutilma va dispersiyasi hisoblandi. Uchinchi bosqichda olingan natijalar jadval va grafiklarda vizuallashtirildi, so‘ng boshqa ilmiy yondashuvlar bilan qiyoslab muhokama qilindi [5], [6].

NATIJALAR

7. Amaliy masala sifatida quyidagi model olindi: korxonada 6 ta mahsulot tekshiriladi, har bir mahsulotning nuqsonli chiqish ehtimoli 0.3 ga teng. X tasodifiy miqdor nuqsonli mahsulotlar sonini bildiradi. Bunda $X \sim \text{Bin}(6, 0.3)$ bo‘lib, diskret taqsimotning ehtimolliklari binomial formula orqali topildi.

Binomial model uchun ehtimolliklar quyidagicha hisoblandi: $P(X = k) = C(6, k)(0.3)^k(0.7)^{(6-k)}$, bu yerda $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Hisob-kitoblar natijasida:

k	P(X = k)	Yig‘ma ehtimollik F(k)	Izoh
0	0.117649	0.117649	binomial qiymat
1	0.302526	0.420175	binomial qiymat
2	0.324135	0.744310	binomial qiymat
3	0.185220	0.929530	binomial qiymat
4	0.059535	0.989065	binomial qiymat
5	0.010206	0.999271	binomial qiymat
6	0.000729	1.000000	binomial qiymat

Jadvaldan ko‘rinadiki, ehtimollik massasi o‘rtacha qiymat atrofida jamlanadi. Ayniqsa $k = 2$ atrofidagi ehtimolliklar eng katta bo‘lib, bu binomial taqsimotning ushbu

parametrlar uchun o'ngga qiya shaklga yaqin ekanini ko'rsatadi. Matematik kutilma va dispersiya quyidagicha topildi:

$$M(X) = np = 6 \times 0.3 = 1.8$$

$$D(X) = npq = 6 \times 0.3 \times 0.7 = 1.26$$

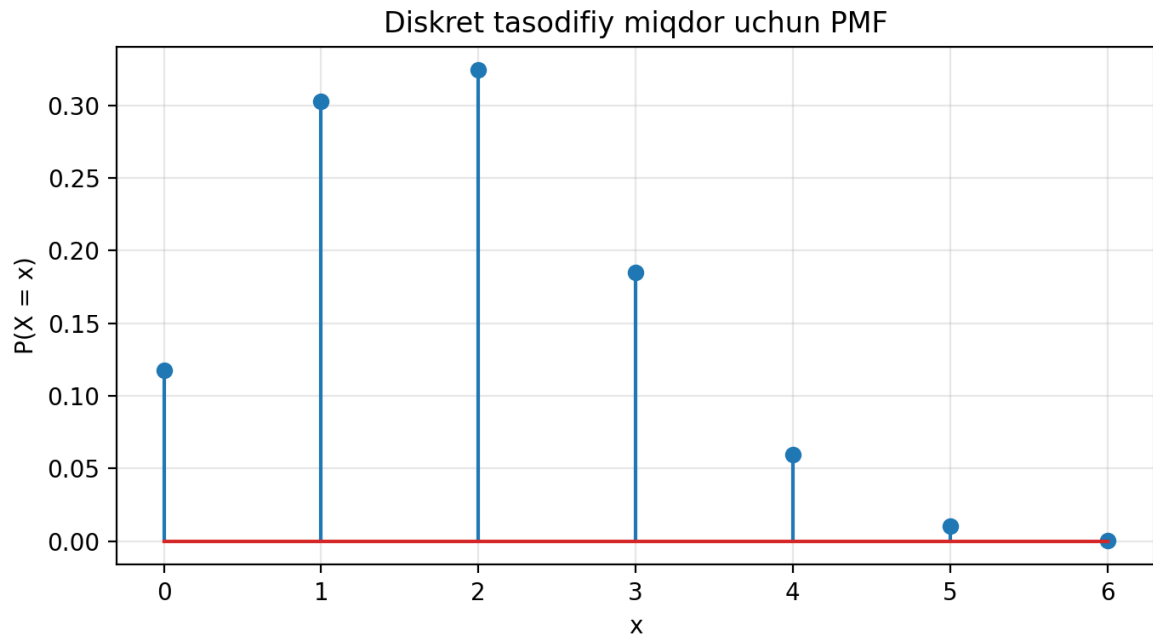
Natija shuni ko'rsatadiki, 6 ta buyum orasida o'rtacha 1.8 ta nuqsonli buyum kutish mumkin; tarqalish darajasi esa 1.26 ga teng. Bu qiymatlar amaliy sifat nazorati jarayonida risk darajasini baholashga yordam beradi.

8. Uzliksiz model sifatida xizmat muddatini ifodalovchi Y tasodifiy miqdor eksponensial taqsimotga ega deb olindi: $Y \sim \text{Exp}(0.5)$. Bunda zichlik funksiyasi $f(y)=0.5e^{-0.5y}$, $y \geq 0$, taqsimot funksiyasi esa $F(y)=1-e^{-0.5y}$ ko'rinishida yoziladi. Bu model nosozliklar orasidagi vaqtni ifodalashda keng qo'llanadi [2], [3].

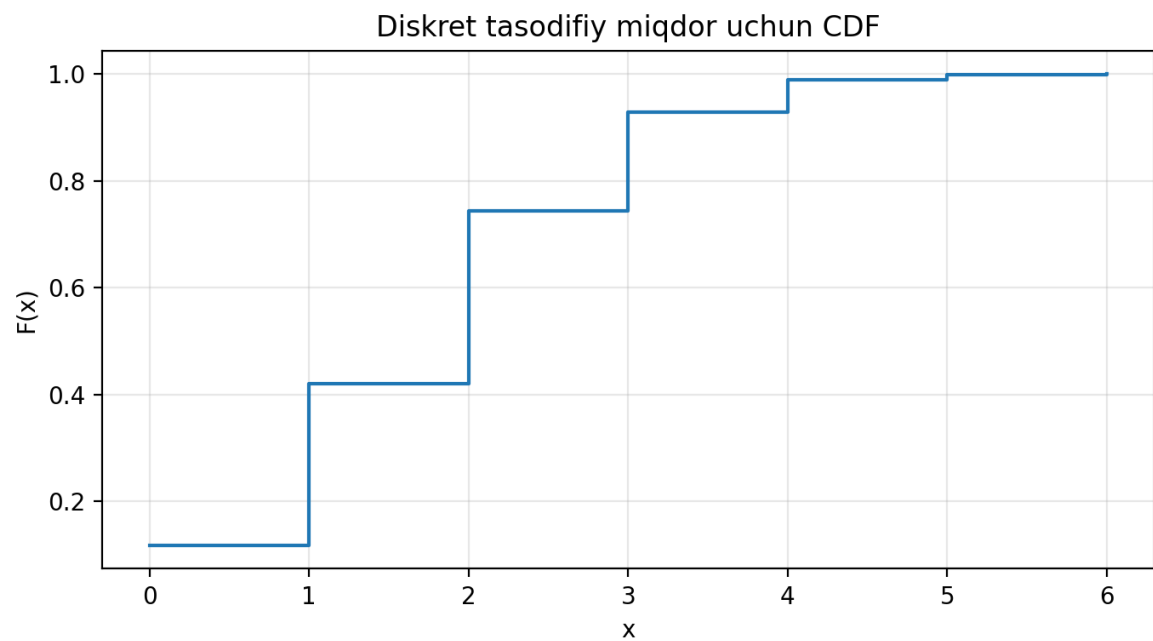
Amaliy ehtimollik quyidagicha hisoblandi: $P(1 < Y < 3) = F(3) - F(1) = e^{(-0.5)} - e^{(-1.5)} = 0.3834$. Shuningdek, $M(Y) = 1/\lambda = 2$ va $D(Y) = 1/\lambda^2 = 4$ natijalari olindi. Demak, xizmat muddati o'rtacha 2 birlik vaqtni tashkil etadi, tarqalish esa 4 birlik kvadratga teng.

y	f(y)	F(y)	Izoh
0	0.500000	0.000000	eksponensial qiymat
1	0.303265	0.393469	eksponensial qiymat
2	0.183940	0.632121	eksponensial qiymat
3	0.111565	0.776870	eksponensial qiymat
4	0.067668	0.864665	eksponensial qiymat
5	0.041042	0.917915	eksponensial qiymat
6	0.024894	0.950213	eksponensial qiymat

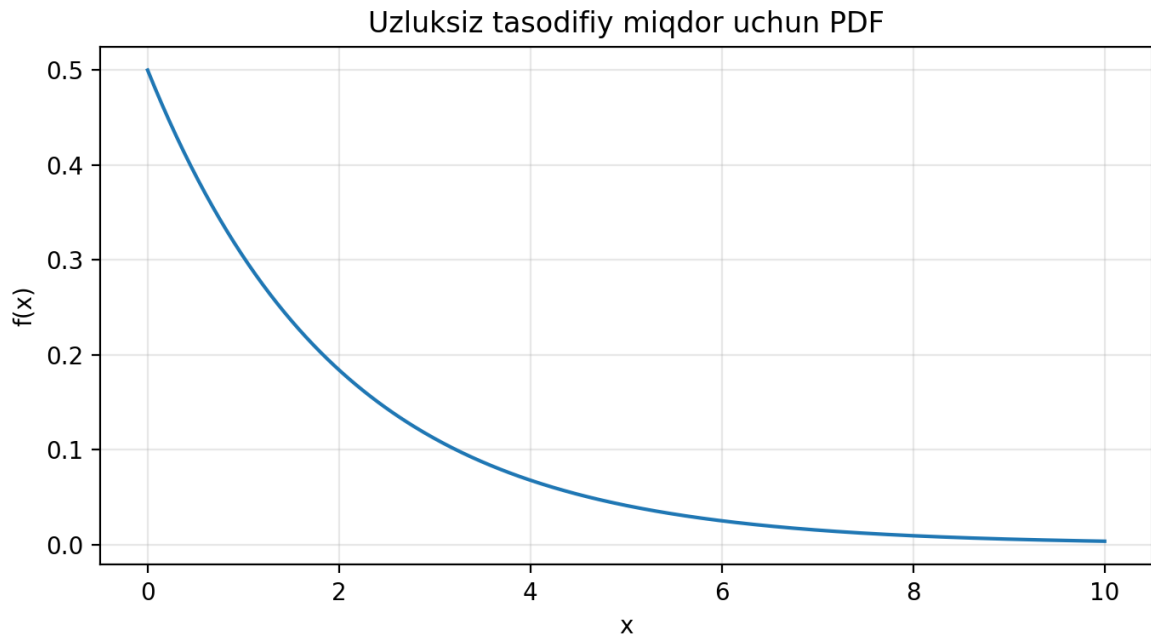
Statistik tahlil nuqtai nazaridan, diskret misolda CDF qadamli ko'tarilish shaklini oldi, uzluksiz misolda esa CDF silliq va monoton o'suvchi funksiya bo'ldi. Ushbu farq tasodifiy miqdor turining tabiatini yaqqol namoyon etadi.



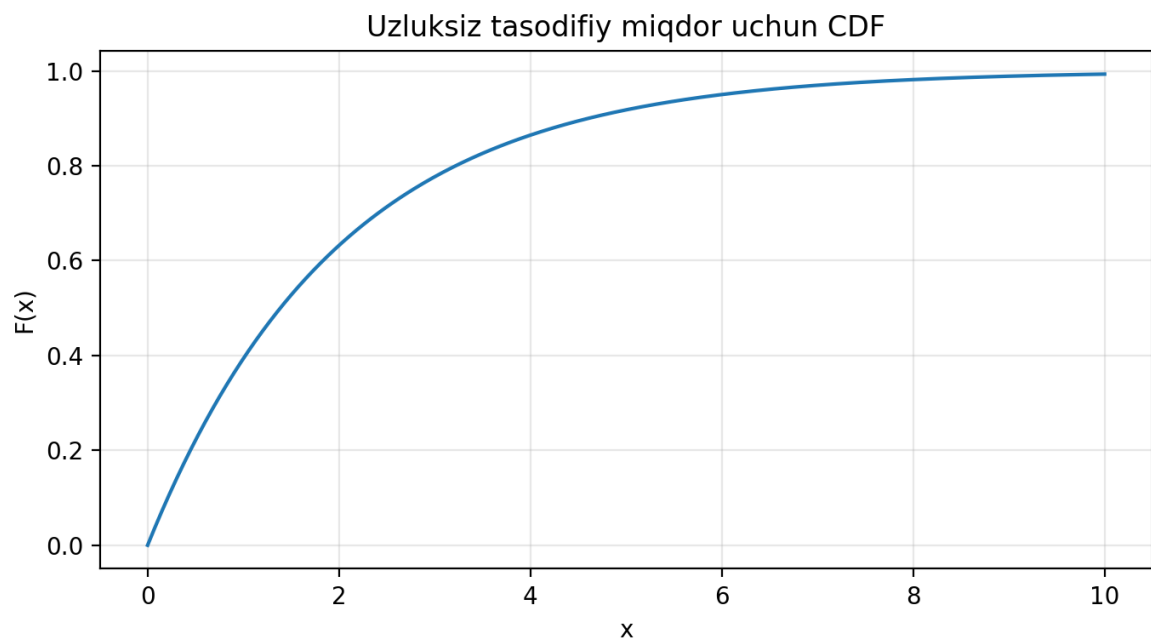
1-rasm. Binomial model uchun ehtimollik massasi funksiyasi (PMF).



2-rasm. Binomial model uchun taqsimot funksiyasi (CDF).



3-rasm. Eksponensial model uchun ehtimollik zichligi funksiyasi (PDF).



4-rasm. Eksponensial model uchun taqsimot funksiyasi (CDF).

MUHOKAMA

9. Olingan natijalar diskret va uzluksiz taqsimotlar o'rtasidagi asosiy konseptual farqni tasdiqladi: diskret modelda ehtimollik alohida nuqtalarga taqsimlanadi, uzluksiz modelda esa ehtimollik interval bo'yicha zichlikdan integrallash orqali olinadi. Shu bois diskret CDF pog'onali, uzluksiz CDF esa uzluksiz shaklda namoyon bo'ladi. Bu kuzatuv adabiyotlarda berilgan nazariy tavsiflar bilan mos keladi [1]–[4].

Boshqa ilmiy yondashuvlar bilan solishtirganda, taqsimot funksiyasiga tayangan model afzalligi shundaki, u barcha ehtimollik ma'lumotlarini bitta funksiyada jamlaydi va interval ehtimolliklarini qulay hisoblash imkonini beradi. Masalan, diskret holatda

$P(a \leq X \leq b)$ yig‘ma ehtimolliklar orqali, uzluksiz holatda esa $F(b)-F(a)$ farqi orqali topiladi. Bu usul ehtimollikning geometrik talqinini ham osonlashtiradi.

Modelning afzalliklari qatoriga soddalik, umumiylik va statistik interpretatsiyaning aniqligi kiradi. Kamchiliklari esa shundan iboratki, amaliy ma‘lumotlar ko‘pincha sof diskret yoki sof uzluksiz bo‘lmaydi; ayrim holatlarda aralash, kesilgan yoki nolga ortiqcha to‘plangan taqsimotlar talab etiladi. Shuningdek, real ma‘lumotlarni faqat klassik binomial yoki eksponensial model bilan tavsiflash har doim ham yetarli bo‘lmaydi [5], [6].

Shu nuqtai nazardan, zamonaviy tadqiqotlarda diskret analoglar yaratish, Cramér-von Mises turidagi masofalarni minimallashtirish yoki empirik CDF asosida diskretlashtirish kabi yondashuvlar rivojlanmoqda [5], [6]. Ushbu yo‘nalishlar uzluksiz nazariy modelni amaliy sanaladigan qiymatlar to‘plamiga moslashtirishda foydalidir. Biroq ular qo‘shimcha hisoblash murakkabligi va modelni tanlashda ehtiyotkorlikni talab qiladi.

XULOSA

10. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari ularning ehtimollik tabiatini yagona nazariy ramkada ifodalaydi. Diskret holatda ehtimollik massasi $P(X = x_i) = p_i$ bilan, uzluksiz holatda esa zichlik funksiyasi $f(x) \geq 0$, $\int f(x)dx = 1$ va $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ orqali tavsiflanadi. Matematik kutilma va dispersiya esa modelning markaziy va tarqalish parametrlarini aniqlashga imkon beradi.

Amaliy jihatdan mazkur yondashuv sifat nazorati, ishonchlilik muhandisligi, xavf tahlili va statistik prognozlashda muhim ahamiyatga ega. Binomial va eksponensial misollar taqsimot funksiyasining hisoblash, talqin va vizuallashtirishdagi rolini yaqqol ko‘rsatdi. Kelgusidagi tadqiqotlarda aralash taqsimotlar, diskretlashtirish algoritmlari, empirik CDF baholash usullari hamda katta ma‘lumotlar uchun moslashuvchan ehtimollik modellari chuqur o‘rganilishi maqsadga muvofiqdir.

Natijada, taqsimot funksiyalarini tadqiq etish diskret va uzluksiz miqdorlar orasidagi metodologik ko‘prik bo‘lib xizmat qiladi hamda ehtimollar nazariyasining nazariy va amaliy salohiyatini yanada kengaytiradi.

REFERENCES

Sh. A. Alimov, T. A. Azlarov, M. S. Salohiddinov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent: O‘qituvchi, 2008.

T. A. Azlarov, N. A. Mansurov. Matematik analiz va ehtimollar nazariyasi masalalari. Toshkent, 2015.

M. S. Salohiddinov. Ehtimollar nazariyasi va tasodifiy jarayonlar. Toshkent: Fan, 2002.

B. X. Haydarov. Matematik statistika asoslari. Toshkent, 2020.

O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim muassasalari uchun Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidan o‘quv qo‘llanmalar.

Billingsley, P. (1995). Probability and measure (3rd ed.). Wiley.

Casella, G., & Berger, R. L. (2002). Statistical inference (2nd ed.). Duxbury.

Chakraborty, S. (2015). Generating discrete analogues of continuous probability distributions: A survey of methods and constructions. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 2(6). <https://doi.org/10.1186/s40488-015-0028-6>

Feller, W. (1968). An introduction to probability theory and its applications (Vol. 1, 3rd ed.). Wiley.

Grimmett, G. R., & Stirzaker, D. R. (2020). Probability and random processes (4th ed.). Oxford University Press.

Lodwick, W. A., & Jamison, K. D. (2003). Estimating and validating the cumulative distribution of a function of random variables: Toward the development of distribution arithmetic. *Reliable Computing*, 9, 127–141.

Papoulis, A., & Pillai, S. U. (2002). Probability, random variables, and stochastic processes (4th ed.). McGraw-Hill.

Ross, S. M. (2019). A first course in probability (10th ed.). Pearson.

Barbiero, A., & Hitaj, A. (2023). Discrete approximations of continuous probability distributions obtained by minimizing Cramér-von Mises-type distances. *Statistical Papers*, 64(5), 1669–1697. <https://doi.org/10.1007/s00362-022-01356-2>

Alzaatreh, A., Lee, C., & Famoye, F. (2012). On the discrete analogue of continuous distributions. *Statistical Methodology*, 9(6), 589–603.