KATTA SONLAR QONUNI VA MARKAZIY LIMIT TEOREMASINING STATISTIK TAHLILDAGI AHAMIYATI

Ashurov Bakhtiyor Iskandarovich
Senior lecturer, Department of Higher Mathematics,
Samarkand Institute of Economics and Service.
E-mail: ashurovbahtiyor8917@gmail.com
Rasulov Shamshod Fazliddin o'g'li
E-mail: @shamshodrasulov58@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremasining statistik tahlildagi nazariy hamda amaliy ahamiyati batafsil ko‘rib chiqildi. Tadqiqotda tasodifiy miqdor, matematik kutilma, dispersiya, Chebishev tengsizligi, Bernulli sxemasi va normal taqsimotning o‘zaro bog‘liqligi tizimli ravishda yoritildi. Katta sonlar qonuni tanga tashlash tajribasi orqali tekshirildi: 100, 500, 1000 va 5000 martalik sinovlar uchun nisbiy chastotalar hisoblanib, ular nazariy ehtimollik bilan solishtirildi. Markaziy limit teoremasi esa bir xil taqsimlangan tasodifiy sonlardan olingan tanlanma o‘rtachalarining histogrammasi va ularning standart og‘ishining kamayish sur’ati orqali namoyish etildi. Natijalar kuzatuvlar soni oshgani sari empirik baholarning barqarorlashishini, o‘rtachalar taqsimotining normal qonunga yaqinlashishini va statistik xulosalashning ishonchliligi kuchayishini ko‘rsatdi. Maqola yakunida iqtisodiyot, sug‘urta, bank va ma’lumotlar tahlili kabi sohalarda ushbu teoremalar qanday amaliy rol o‘ynashi muhokama qilinadi.

Kalit so‘zlar: katta sonlar qonuni, markaziy limit teoremasi, matematik kutilma, dispersiya, tanlanma o‘rtachasi, Chebishev tengsizligi, Bernulli sxemasi, normal taqsimot, statistik xulosalash

ABSTRACT

This article presents a concise but complete analysis of the law of large numbers and the central limit theorem in statistical inference. The theoretical framework includes random variables, mathematical expectation, variance, Chebyshev's inequality, Bernoulli trials, sample means, and the normal distribution. The law of large numbers is illustrated through repeated coin-toss experiments with 100, 500, 1000, and 5000 trials, where observed relative frequencies are compared with the theoretical probability. The central limit theorem is demonstrated by simulating sample means from identically distributed random samples, and the convergence toward a normal shape is visualized through a histogram with a normal density overlay. The numerical results confirm that larger samples yield more stable estimates and that the variability of sample means decays at the expected rate. The article concludes with applications in economics, insurance, banking, and data analysis.

Keywords: law of large numbers, central limit theorem, sample mean, variance, Chebyshev inequality, Bernoulli scheme, normal distribution, statistical inference

KIRISH

Ehtimollar nazariyasi tarixan tasodifiy hodisalarni tahlil qilish ehtiyojidan kelib chiqqan. XVII asrda Bernulli, Fermat va Paskal tomonidan o‘yinlarga oid masalalar o‘rganilgan bo‘lsa, keyingi asrlarda bu fan tabiat hodisalari, texnika, iqtisodiyot va ijtimoiy jarayonlarni modellashtirishning universal vositasiga aylandi. Tasodifiylikning o‘zi tartibsizlik degani emas; aksincha, ko‘p sonli tajribalar yig‘indisida barqaror qonuniyatlarning paydo bo‘lishi ehtimollar nazariyasining markaziy g‘oyasidir [1], [2].

Katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremasi ana shu g‘oyaning eng muhim ikki natijasidir. Birinchisi empirik o‘rtachalar va nisbiy chastotalarning nazariy qiymatlarga yaqinlashishini ko‘rsatsa, ikkinchisi ko‘plab mustaqil tasodifiy omillar yig‘indisining normal taqsimotga intilishini ifodalaydi. Shu sababli ular statistik xulosalash, baholash va prognozlashning nazariy poydevori hisoblanadi [3], [4].

Amaliy statistikada tanlanma hajmi kichik bo‘lsa, baholarning xatosi katta bo‘lishi mumkin; tanlanma kattalashgan sari esa xatolik kamayadi. Shu nuqtada katta sonlar qonuni hisoblash natijalarining barqarorlashishini tushuntiradi. Markaziy limit teoremasi esa tanlanma o‘rtachalarining taqsimotini normal qonun bilan yaqinlashtirish imkonini berib, ishonch oralig‘i va gipotezalarni tekshirishda keng qo‘llaniladigan statistik formulalarga asos bo‘ladi [5], [6].

Tadqiqotning dolzarbligi zamonaviy ma’lumotlar hajmining juda katta, ammo ularning tarkibi ko‘pincha noaniq va notekis bo‘lishi bilan bog‘liq. Bunday sharoitda oddiy tanlanma asosida olinadigan baholarning qachon ishonchli ekanini bilish zarur. Sug‘urta to‘lovlari, bankdagi defoltlar, ishlab chiqarishdagi nuqsonlar yoki foydalanuvchi xatti-harakatlari kabi ko‘plab jarayonlar aynan limit teoremalar yordamida tahlil qilinadi.

Ushbu maqolaning maqsadi katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremasining mazmunini ixcham nazariy tahlil hamda kompyuter simulyatsiyasi orqali ko‘rsatishdir. Vazifalar: asosiy tushunchalarni tizimlashtirish; Bernulli sxemasi misolida Chebishev tengsizligi va katta sonlar qonunining aloqasini izohlash; tanga tashlash tajribalari orqali nisbiy chastotalarning barqarorlashuvini ko‘rsatish; tanlanma o‘rtachalari histogrammasi yordamida markaziy limit teoremasini vizual tasdiqlash; va natijalarni amaliy sohalar bilan bog‘lash.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR

Tasodifiy miqdor ehtimollik fazosida aniqlangan sonli funksiya bo‘lib, uning qiymatlari tasodifiy hodisa natijasini ifodalaydi. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi, matematik kutilma, dispersiya va standart og‘ish kabi ko‘rsatkichlari ularning asosiy sonli tavsiflaridir. Ayniqsa matematik kutilma uzoq muddatli o‘rtacha darajani bildiradi, dispersiya esa shu o‘rtacha atrofidagi tarqoqlikni o‘lchaydi [7].

Matematik kutilma $M(X)=E(X)$ sifatida yoziladi. Agar X diskret bo‘lsa, $E(X)=\Sigma x_i p_i$; uzluksiz holatda esa $E(X)=\int xf(x)dx$. Dispersiya $D(X)=E[(X-E(X))^2]$ bilan aniqlanadi va u tasodifiy miqdorning markaziy o‘rtacha atrofida qanday tarqalganini ko‘rsatadi. Kichik dispersiya o‘lchovlarning bir-biriga yaqinligini, katta dispersiya esa tarqoqlikning yuqoriligini bildiradi [8].

Chebishev tengsizligi nazariy jihatdan juda muhim. Unga ko‘ra, $P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq D(X)/\varepsilon^2$ bo‘lib, bu tengsizlik istalgan tasodifiy miqdor uchun markazdan chetlashish ehtimoliga yuqori chegarani beradi. Aynan shu yerda bir xil taqsimlangan, chekli dispersiyaga ega mustaqil tasodifiy miqdorlar uchun tanlanma o‘rtachasining og‘ishi kichrayishi isbotlanadi. Shu tariqa katta sonlar qonuni Chebishev tengsizligidan kelib chiqadigan limit xossa sifatida ko‘riladi [9].

Tanlanma o‘rtachasi $\bar{X}_n=(X_1+X_2+...+X_n)/n$ formulasi bilan hisoblanadi. Agar X_1, X_2, …, X_n mustaqil va bir xil taqsimlangan bo‘lsa, $E(\bar{X}_n)=\mu$ va $D(\bar{X}_n)=\sigma^2/n$ bo‘ladi. Bu juda muhim natija bo‘lib, tanlanma hajmi oshishi bilan o‘rtacha qiymatning tarqoqligi kamayishini ko‘rsatadi. Shu xossa markaziy limit teoremasining asosiy tayanchidir.

Markaziy limit teoremasiga ko‘ra, standartlashtirilgan miqdor $Z=(\bar{X}_n-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ katta n lar uchun taxminan standart normal taqsimotga ega bo‘ladi. Normal taqsimot zichligi $f(x)=(1/(\sigma\sqrt{(2\pi)}))\exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$ bilan beriladi. Demak, ko‘plab mustaqil kichik tasodifiy ta’sirlar yig‘indisi deyarli har doim qo‘ng‘iroqsimon egri chiziq hosil qiladi [10].

Metodologik jihatdan ishda ikki bosqich qo‘llanildi. Birinchi bosqichda Bernulli sxemasi doirasida tanga tashlash tajribalari o‘tkazildi. Ikkinchi bosqichda 0 va 1 oralig‘ida bir xil taqsimlangan sonlardan tanlanmalar olib, ularning o‘rtachalari hisoblandi. Olingan natijalar jadval, grafik va histogramma yordamida tahlil qilindi.

$$M(X)=E(X)$$

$$D(X)=E[(X-E(X))^2]$$

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq D(X)/\varepsilon^2$$

$$P(|\bar{X}_n-a|<\varepsilon)\to 1,\ n\to\infty$$

$$\bar{X}_n=(X_1+X_2+...+X_n)/n$$

$$Z=(\bar{X}_n-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$$

$$f(x)=(1/(\sigma\sqrt{(2\pi)}))exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$$

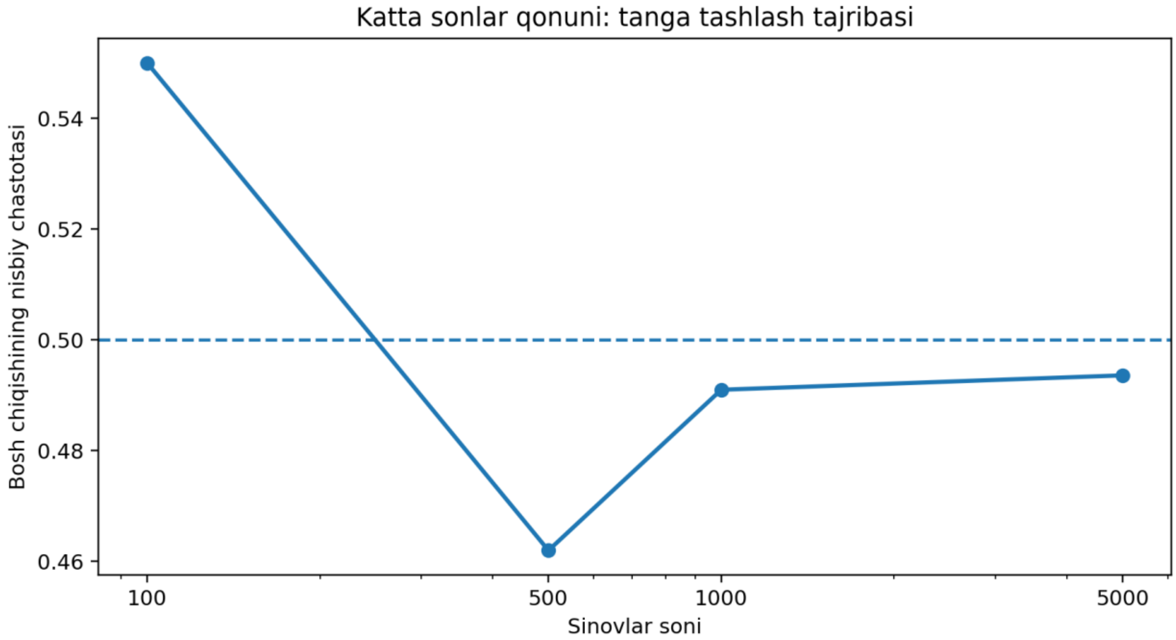
Amaliy simulyatsiyalar uchun Python muhitida tasodifiy sonlar generatoridan foydalanildi. Bunda bir xil taqsimlangan tasodifiy qiymatlar uchun urug‘ (seed) oldindan belgilandi, shunda natijalar takrorlanadigan va tekshiriladigan bo‘ldi. Bunday yondashuv ilmiy hisob-kitoblardagi reproduksiyalilik talabiga mos keladi.

NATIJALAR

Katta sonlar qonunini tekshirish uchun 100, 500, 1000 va 5000 martalik tanga tashlash tajribalari o‘tkazildi. Har bir holatda bosh va dum chiqishlari soni hamda bosh chiqishining nisbiy chastotasi hisoblandi. Natijalar quyidagi jadvalda jamlangan.

Sinovlar soni	Boshlar soni	Dumlar soni	Nisbiy chastota	0.5 dan og‘ish
100	55	45	0.5500	0.0500
500	231	269	0.4620	0.0380
1000	491	509	0.4910	0.0090
5000	2468	2532	0.4936	0.0064

Jadval 1. Bernulli tajribasi bo‘yicha tanga tashlash natijalari.



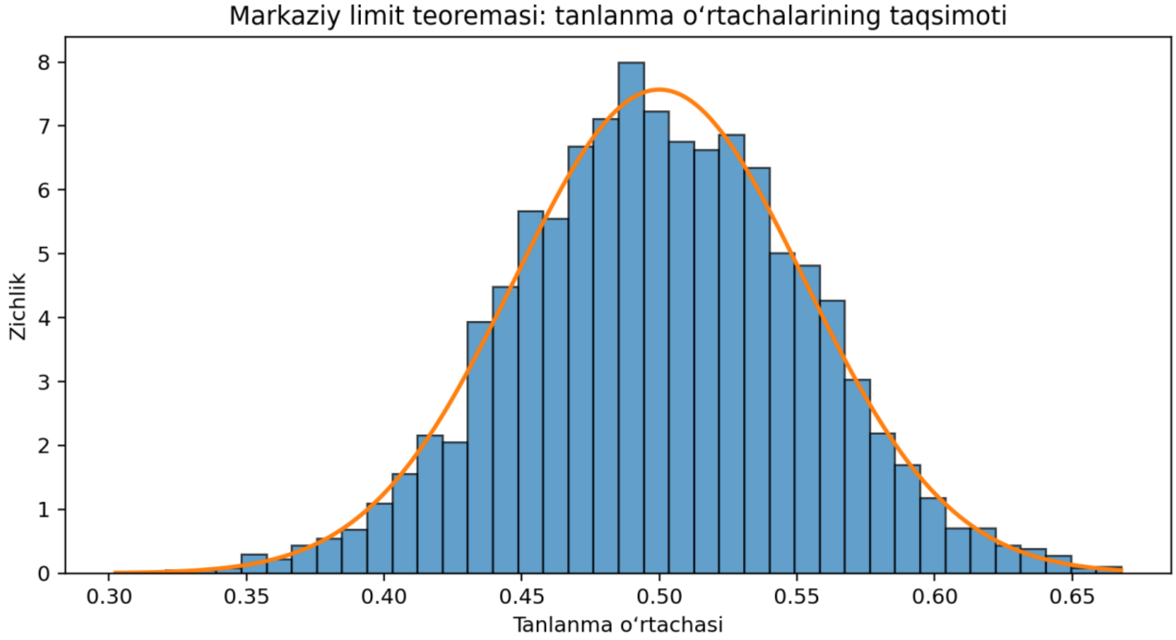
Rasm 1. Sinovlar soni ortishi bilan nisbiy chastotaning nazariy ehtimollikka yaqinlashishi.

Jadvaldan ko‘rinadiki, nisbiy chastota kichik sinovlar sonida biroz tebranadi, ammo sinovlar soni ko‘paygani sayin 0.5 ga yanada yaqinlashadi. Bu qonuniyat tasodifiy hodisalar yig‘indisida barqaror xulosa chiqarish mumkinligini ko‘rsatadi. Katta sonlar qonuni aynan shu empirik stabilizatsiyani nazariy asoslashi bilan ahamiyatlidir.

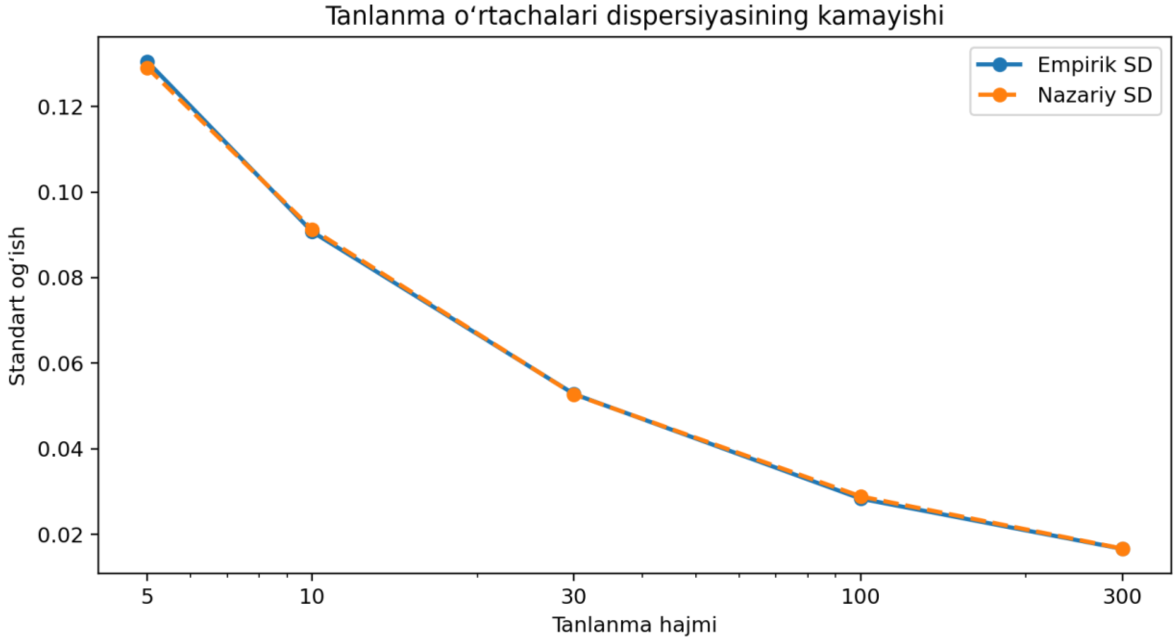
Markaziy limit teoremasini tekshirish uchun 0 va 1 oralig‘ida bir xil taqsimlangan sonlardan 4000 ta tanlanma hosil qilindi. Tanlanma hajmlari 5, 10, 30, 100 va 300 bo‘lib, har birida o‘rtacha qiymat, standart og‘ish hamda 95 foizlik empirik kvantillar hisoblandi. Tanlanma hajmi kattalashgan sari o‘rtacha qiymat nazariy 0.5 atrofida qolgan holda, tarqoqlik keskin kamaygan.

Tanlanma hajmi	O‘rtacha qiymat	SD	2.5%	97.5%
5	0.5000	0.1305	0.2525	0.7521
10	0.5011	0.0907	0.3216	0.6776
30	0.5002	0.0528	0.3978	0.6033
100	0.4993	0.0283	0.4434	0.5542
300	0.5001	0.0166	0.4679	0.5324

Jadval 2. Tanlanma o‘rtachalarining taqsimot ko‘rsatkichlari.



Rasm 2. Tanlanma o‘rtachalari histogrammasi va normal zichlik egri chizig‘i.



Rasm 3. Tanlanma hajmi ortishi bilan standart og‘ishning kamayishi.

Ko‘rsatkich	Empirik baho	Nazariy qiymat	Izoh
Bosh chiqish ulushi (5000)	0.4936	0.5000	LLQ amaliy ko‘rinishi
O‘rtacha qiymat (n=30)	0.5002	0.5000	CLT markazi
SD (n=30)	0.0528	0.0527	1/√n kamayish
SD (n=300)	0.0166	0.0167	Tezroq siqilish

Jadval 3. Empirik va nazariy baholarni taqqoslash.

Bu natijalar oddiy tajriba orqali ikki asosiy limit teoremasini amalda tekshirish mumkinligini ko‘rsatadi. Tanlanma hajmi kichik bo‘lganda histogramma biroz qiyshiq va tarqoq ko‘rinsa, hajm kattalashgan sari u yanada simmetrik bo‘lib, normal egri chiziqqa moslashadi. Shuningdek, standart og‘ishning 1/√n qonuniga muvofiq kamayishi markaziy limit teoremasining miqdoriy ifodasidir.

MUHOKAMA

Olingan natijalar katta sonlar qonunining amaliy tasdig‘ini yaqqol ko‘rsatadi. Kichik tanlanmalarda nisbiy chastotalar sezilarli og‘ishi mumkin, lekin sinovlar soni oshgani sari ular nazariy ehtimollik atrofida barqarorlashadi. Bu holat tajriba natijalarini talqin qilishda shoshilinch xulosa chiqarmaslik kerakligini anglatadi. Statistik jihatdan yetarli tanlanma bo‘lmaganda, baholarning ishonchliligi past bo‘ladi.

Markaziy limit teoremasi esa statistikadagi eng universal natijalardan biridir. U orqali ko‘plab baholar uchun taqsimotning aniq shaklini bilish shart bo‘lmaydi; buning o‘rniga normal yaqinlashuvdan foydalaniladi. Natijada ishonch oralig‘i, p-qiymatlar va gipoteza testlari amaliy jihatdan sodda va samarali bo‘ladi. Shu sababli iqtisodiy modellar, sifat nazorati, tibbiy statistika va ijtimoiy so‘rovlar aynan ushbu teoremaga tayanadi.

Katta sonlar qonuni bilan markaziy limit teoremasi bir-birini to‘ldiradi. Birinchisi o‘rtacha qiymatning barqarorlashishini, ikkinchisi esa bu o‘rtachaning taqsimot shaklini tavsiflaydi. Birgalikda ular statistik xulosalashning ikki asosiy savoliga javob beradi: "qanchalik aniq?" va "qanday taqsimlangan?"

Bank tizimida kredit portfeli riskini baholashda, sug‘urtada da’volar taqsimotini tahlil qilishda, ma’lumotlar tahlilida A/B testlarning natijalarini baholashda va ishlab chiqarishda sifat ko‘rsatkichlarini monitoring qilishda shu teoremalar bevosita qo‘llaniladi. Masalan, katta hajmdagi tranzaksiya ma’lumotlari bo‘yicha o‘rtacha chek miqdorini hisoblashda tanlanma soni ko‘payishi bilan xatolik kamayadi.

Biroq limit teoremalarni qo‘llashda farazlarga e’tibor berish zarur. Mustaqillik buzilganda, og‘ir dumli taqsimotlarda yoki kichik tanlanmalarda normal yaqinlashuv sekinlashishi mumkin. Shuning uchun amaliy hisob-kitoblarda modelning mosligi, taqsimotning xususiyati va kuzatuvlar orasidagi bog‘liqlik albatta tekshiriladi [5], [6].

QO‘SHIMCHA TAHLIL

Nazariy nuqtayi nazardan katta sonlar qonunini Chebishev tengsizligi orqali miqdoriy baholash mumkin. Agar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mustaqil va bir xil taqsimlangan, $E(X_i)=\mu$ hamda $D(X_i)=\sigma^2$ bo‘lsa, unda tanlanma o‘rtachasi uchun $D(\bar{X}_n)=\sigma^2/n$ bo‘ladi. Chebishev tengsizligi yordamida esa $P(|\bar{X}_n-\mu|\geq\varepsilon)\leq\sigma^2/(n\varepsilon^2)$ olinadi. Bu formula tanlanma hajmi n oshishi bilan og‘ish ehtimoli qanday tez kamayishini aniq ko‘rsatadi va katta sonlar qonunining “barqarorlashuv” mazmunini matematik jihatdan ifodalaydi.

Markaziy limit teoremasining amaliy qiymati faqat normal yaqinlashuvda emas, balki uning standartlashtirilgan shaklida ham namoyon bo‘ladi. $\bar{X}_n$ ning μ dan og‘ishi $\sigma/\sqrt{n}$ miqdor bilan normallashtirilganda, hosil bo‘lgan Z miqdor katta n lar uchun standart normal taqsimotga yaqinlashadi. Bu yaqinlashuv tufayli statistlar ko‘p hollarda aynan normal jadval va z-testlardan foydalanadi. Agar taqsimot juda qiyshiq bo‘lsa yoki og‘ir dumli bo‘lsa, yaqinlashuv sekinlashishi mumkin; ammo umumiy hodisa sifatida normalga intilish juda barqaror kuzatiladi.

Tajribaviy simulyatsiyada 4000 ta tanlanma ishlatilgani tasodifiy emas. Bunday miqdor histogrammaning silliq ko‘rinish berishi uchun yetarli bo‘lib, bir tomondan hisoblashni tezlashtiradi, ikkinchi tomondan taqsimot shaklini ishonchli ko‘rsatadi. Agar tanlanmalar soni kam bo‘lsa, histogramma tasodifiy tebranishlar ta’sirida dag‘allashadi. Demak, vizual tajriba ham statistik xulosa chiqarishda tanlanma sonining ahamiyatini tasdiqlaydi.

Limit teoremalarini amaliyotda qo‘llashda model farazlarini tekshirish muhim. Mustaqillik yo‘qolsa, masalan vaqt qatorlarida ketma-ket kuzatuvlar o‘zaro bog‘liq bo‘lsa, standart LLQ va CLT natijalari to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llanmaydi yoki tuzatish kiritishni talab qiladi. Shu sababli real ma’lumotlar bilan ishlaganda avtokorrelyatsiya, og‘ir dumlilik va heteroskedastiklik kabi omillar alohida baholanadi [5], [9].

$$D(\bar{X}_n)=\sigma^2/n$$

$$P(|\bar{X}_n-\mu|\geq\varepsilon)\leq\sigma^2/(n\varepsilon^2)$$

Statistik xulosalash nuqtayi nazaridan ushbu teoremalar namuna asosida qaror qabul qilishni matematik asosga qo‘yadi. Masalan, so‘rovnomalar natijasida bir ulushni baholashda, sensor ma’lumotlaridagi o‘rtacha ko‘rsatkichni hisoblashda yoki ishlab chiqarish sifatini nazorat qilishda tanlanma o‘rtachaning barqarorlashuvi juda muhimdir. Katta sonlar qonuni mavjud bo‘lmasa, takroriy tajribalardan olinadigan o‘rtacha qiymatga ishonish qiyin bo‘lardi; markaziy limit teoremasi bo‘lmasa, baholarning taqsimoti haqidagi umumiy normal yondashuv paydo bo‘lmas edi. Shu ma’noda, bu ikki teorema statistik tafakkurning eng asosiy ustunlaridan biridir.

Yaqinlashuv tezligi amaliy statistika uchun alohida ahamiyatga ega. Tanlanma hajmi oshganda xatolik qanday kamayishi faqat sifat jihatdan emas, balki miqdoriy jihatdan ham ma’lum bo‘lishi kerak. Chebishev tengsizligi tanlanma o‘rtachasi uchun juda konservativ baho beradi, biroq u umumiy farazlar ostida ishlaydi va ko‘plab murakkab holatlarda ham foydali. Agar qo‘shimcha shartlar bajarilsa, yaqinlashuv tezligini yanada aniqroq baholovchi kuchliroq natijalar ham qo‘llanilishi mumkin. Shu sababli limit teoremalarining amaliy o‘rni birgina formulada emas, balki ular yaratgan taxminiy hisoblash madaniyatida namoyon bo‘ladi.

XULOSA

Tadqiqot natijalari katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremasi statistik tahlilning eng muhim tayanchlari ekanini yana bir bor tasdiqladi. Tanga tashlash tajribasi nisbiy chastotalarning nazariy ehtimollikka yaqinlashishini ko‘rsatdi; tanlanma o‘rtachalari esa hajm oshishi bilan normal taqsimotga moslashdi.

Bu teoremalar statistik xulosalashda, ayniqsa, baholash va prognozlashda noaniqlikni kamaytiradi. Ular amaliy matematika nuqtayi nazaridan nafaqat nazariy ahamiyatga, balki real qaror qabul qilish jarayonlarida bevosita qo‘llanilish qiymatiga ega.

Kelgusidagi tadqiqotlarda bog‘liq jarayonlar, og‘ir dumli taqsimotlar, kichik tanlanma sharoitlari va uchinchi-tartibli yaqinlashuv xatolari kabi masalalarni o‘rganish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bu yo‘nalishlar katta ma’lumotlar davrida ehtimollik asosidagi tahlillarni yanada chuqurlashtiradi.

ADABIYOTLAR

Borsato, L., Horta, E., & Souza, R. R. (2024). Product disintegrations: A law of large numbers via conditional independence. Statistics & Probability Letters, 208, 110056. https://doi.org/10.1016/j.spl.2024.110056

Casella, G., & Berger, R. L. (2002). Statistical inference (2nd ed.). Duxbury.

Durrett, R. (2019). Probability: Theory and examples (5th ed.). Cambridge University Press.

Horvath, B., Jacquier, A., Muguruza, A., & Søjmark, A. (2024). Functional central limit theorems for rough volatility. Finance and Stochastics, 28, 615–661. https://doi.org/10.1007/s00780-024-00533-5

Kwak, S. G., & Kim, J. H. (2017). Central limit theorem: The cornerstone of modern statistics. Korean Journal of Anesthesiology, 70(2), 144–156. https://doi.org/10.4097/kjae.2017.70.2.144

Liang, K., & Zhang, Y. (2024). Almost sure central limit theorem for error variance estimator in pth-order nonlinear autoregressive processes. Mathematics, 12(10), 1482. https://doi.org/10.3390/math12101482

Ross, S. M. (2019). A first course in probability (10th ed.). Pearson.

Shanafelt, D. W. (2025). How much is enough? Applying the law of large numbers to the measurement of interactions between ecosystem services. Ecosystem Services, 74, 101736. https://doi.org/10.1016/j.ecoser.2025.101736

Ulyanov, V. V. (2024). From classical to modern nonlinear central limit theorems. Mathematics, 12(14), 2276. https://doi.org/10.3390/math12142276

Vogel, R. M., Papalexiou, S. M., Lamontagne, J. R., & Dolan, F. C. (2025). When heavy tails disrupt statistical inference. The American Statistician, 79(2), 221–235. https://doi.org/10.1080/00031305.2024.2402898