

**BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING YECHISH
USULLARI VA IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR
VA MEXANIK MODELLARINI TAHLIL QILISH****Axmatov Azizbek Abduvaxob o'g'li**

Navoiy davlat universiteti Aniq fanlar fakulteti
matematika kafedrası v.b dotsenti, PhD
aaakhmatov94@gmail.com

Isroilova Nozimaxon Saloxiddinovna

Navoiy davlat universiteti Aniq fanlar fakulteti talabasi
nozimaisroilova234@gmail.com

Omonboyeva Muxlisa Javlonbek qizi

Navoiy davlat universiteti Aniq fanlar fakulteti talabasi
muxlisaomonboyeva044@gmail.com

Abstract

Ushbu ilmiy maqolada birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning analitik va geometrik yechish usullari tizimli ravishda o'rganiladi hamda ularning mexanik modellarini tahlil qilishdagi ahamiyati yoritiladi. Birinchi tartibli tenglamalar uchun o'zgaruvchilarni ajratish, bir jinsli, chiziqli va to'liq differensial tenglamalar usullari batafsil bayon qilinadi. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar doimiy koeffitsiyentli va o'zgaruvchan koeffitsiyentli hollar uchun qaraladi. Mexanik modellar sifatida prujinali mayatnik, majburiy tebranishlar va dissipativ tizimlar tahlil qilinadi. Maqola natijalari differensial tenglamalar nazariyasining muhandislik va fizik modellashtirishdagi amaliy ahamiyatini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: Birinchi tartibli differensial tenglamalar, ikkinchi tartibli differensial tenglamalar, mexanik modellar, o'zgaruvchilarni ajratish, bir jinsli tenglamalar, chiziqli differensial tenglamalar, prujinali mayatnik, majburiy tebranishlar, dissipativ tizimlar, Koshi masalasi, xarakteristik tenglama.

Kirish

Differensial tenglamalar fan va texnikaning turli sohalarida, xususan, mexanika, fizika, biologiya, iqtisod va muhandislikda real jarayonlarni modellashtirishning asosiy vositasi hisoblanadi. Birinchi tartibli differensial tenglamalar ko'plab sodda dinamik tizimlarning, masalan, radioaktiv parchalanish, populyatsiyalar o'zgarishi va sovutish jarayonlarining matematik ifodasidir. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar esa tebranish harakatlari, kosmik jismlarning orbitasi va elektr zanjirlaridagi o'tkinchi jarayonlarni tasvirlaydi [Boyce va DiPrima, 2017, 12-bet].

Ushbu maqolaning asosiy maqsadi – birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishning fundamental usullarini tizimlashtirish va ularni mexanik modellarga tatbiq etish orqali nazariy bilimlarni amaliyot bilan bog‘lashdir. Maqolada birinchi navbatda birinchi tartibli tenglamalar uchun analitik usullar, so‘ngra ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar va ularning xususiy hollari ko‘rib chiqiladi. Mexanik modellar tahlili prujinali mayatnik, so‘nuvchi va majburiy tebranishlar misolida amalga oshiriladi.

Adabiyotlar tahlili

Differensial tenglamalar tarixi XVII asrda Isaak Nyuton va Gotfrid Leybnitsning differensial hisobni kashf etishi bilan boshlangan. Nyutonning “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica” asarida harakat tenglamalari differensial tenglamalar ko‘rinishida berilgan [Newton, 1687, 89-bet]. XVIII asrda Leonard Eyler birinchi tartibli tenglamalarni yechishning sonli usullarini ishlab chiqdi va ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar uchun xarakteristik tenglama metodini taklif qildi [Euler, 1768, 45-bet].

XIX asrda Ogyusten Lui Koshi birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun mavjudlik va yagonalik teoremlarini isbotladi. Bu teoremlar differensial tenglamalar nazariyasining qat’iy matematik asosini yaratdi [Coddington va Levinson, 1955, 74-bet]. Shu davrda Jozef Lui Lagranj mexanik tizimlar uchun umumiy tenglamalarni yozdi va ikkinchi tartibli tenglamalarning xususiy yechimlarini topishda parametrlar variatsiyasi usulini kiritdi.

XX asrda mexanik modellarni differensial tenglamalar orqali tahlil qilish yanada rivojlandi. Andrey Andreyevich Markov va Aleksandr Mixaylovich Lyapunov turg‘unlik nazariyasiga asos soldilar [Lyapunov, 1992, 132-bet]. Zamonaviy adabiyotlarda birinchi tartibli tenglamalar uchun o‘zgaruvchilarni ajratish, bir jinsli tenglamalar, Bernulli tenglamalari va to‘liq differensial tenglamalar usullari keng yoritilgan [Zill, 2018, 203-bet]. Ikkinchi tartibli tenglamalar uchun esa xarakteristik tenglama, fundamental yechimlar sistemasi va Koshi funksiyasi kabi tushunchalar batafsil tahlil qilinadi [Arnold, 2006, 156-bet].

Mexanik modellar sohasida prujinali mayatnik va uning tebranishlari differensial tenglamalar nazariyasining klassik namunasi hisoblanadi. So‘nuvchi va majburiy tebranishlar real mexanik tizimlarning muhim xususiyatlarini aks ettiradi [Kreyszig, 2015, 278-bet]. Ushbu maqola yuqoridagi manbalarni sintez qilgan holda, yangi misollar va tahliliy izohlar bilan boyitilgan.

Muhokama

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning yechish usullari

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy $F(x, y, y') = 0$ yoki $y' = f(x, y)$ ko‘rinishida beriladi. Quyida asosiy analitik usullar keltirilgan.

1.1. O'zgaruvchilarni ajratish usuli

Agar tenglama $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ ko'rinishiga keltirilsa, u holda o'zgaruvchilar ajratiladi: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$. So'ngra ikkala tomon integrallanadi. Masalan, $\frac{dy}{dx} = xy$ tenglamasi yechimi $y = Ce^{x^2/2}$ bo'ladi [Boyce va DiPrima, 2017, 38-bet].

1.2. Bir jinsli tenglamalar

Agar $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ sharti bajarilsa, $y = vx$ almashtirishi bilan o'zgaruvchilar ajratiladigan tenglamaga kelinadi.

1.3. Chiziqli birinchi tartibli tenglamalar

Umumiy ko'rinish: $y' + P(x)y = Q(x)$. Integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ orqali yechim topiladi:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)Q(x)dx + C \right).$$

Bu usulning kuchi – ixtiyoriy $P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalarida ishlashidir [Zill, 2018, 112-bet].

1.4. To'liq differensial tenglamalar

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ko'rinishida berilgan tenglama, agar $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ bo'lsa, to'liq differensial deyiladi. U holda $u(x, y)$ potensial funksiya topilib, $du = 0$ dan $u(x, y) = C$ yechim olinadi.

Ushbu usullarning har biri o'zining qo'llanish sohasiga ega. Masalan, radioaktiv parchalanish $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ – o'zgaruvchilarni ajratish, populyatsiya modeli $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$ – Bernulli tenglamasidir.

2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar
Ikkinchi tartibli tenglama umumiy $F(x, y, y', y'') = 0$ yoki $y'' = f(x, y, y')$ ko'rinishida bo'ladi. Bu bo'limda chiziqli tenglamalarga asosiy e'tibor qaratiladi.

2.1. Doimiy koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli tenglamalar
Tenglama: $ay'' + by' + cy = 0$. Xarakteristik tenglama: $ar^2 + br + c = 0$. Uch hol mavjud:

- Ikkita haqiqiy ildiz $r_1 \neq r_2$: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
- Ikkita kompleks ildiz $\alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.
- Ikkala ildiz teng r : $y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$ [Kreyszig, 2015, 143-bet].

2.2. O'zgaruvchan koeffitsiyentli chiziqli tenglamalar
Bunday tenglamalar, masalan, Eyler-Koshi tenglamasi $x^2 y'' + axy' + by = 0$ ($x > 0$) ko'rinishida bo'lib, $y = x^r$ qo'yish orqali yechiladi. Boshqa hollarda maxsus funksiyalar (Bessel, Legendre va boshqalar) qo'llaniladi [Arnold, 2006, 89-bet].

2.3. Bir jinsli bo'lmagan tenglamalar

$ay'' + by' + cy = f(x)$ ko'rinishidagi tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli yechim va xususiy yechim yig'indisidan iborat. Xususiy yechim aniqlanmagan koeffitsiyentlar usuli yoki parametrlarni variatsiyalash usuli bilan topiladi. Parametrlarni variatsiyalash usuli universal bo'lib, ixtiyoriy $f(x)$ uchun qo'llanadi [Coddington va Levinson, 1955, 192-bet].

3. Mexanik modellarni tahlil qilish

3.1. Prujinali mayatnik (erkin so'nmaydigan tebranishlar)

Guk qonuniga asosan, prujinaga osilgan m massali jism uchun harakat tenglamasi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

bu yerda k – prujinaning bikrligi. Bu ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama. Xarakteristik tenglama $mr^2 + k = 0$ dan $r = \pm i\sqrt{k/m}$ kompleks ildizlar. Yechim:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Bu garmonik tebranishlarni ifodalaydi [Kreyszig, 2015, 280-bet].

3.2. So'nuvchi (dissipativ) tebranishlar

Agar qarshilik kuchi tezlikka proporsional bo'lsa ($F_{\text{qarsh}} = -c \frac{dx}{dt}$), tenglama:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Xarakteristik tenglama $mr^2 + cr + k = 0$. Diskriminant belgisiga qarab so'nuvchi (kritik, subkritik yoki superkritik) turlari farqlanadi. Masalan, kichik qarshilikda (subkritik so'nish) yechim:

$$x(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t), \alpha = \frac{c}{2m}, \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Bu tebranishlar amplitudasi eksponensial kamayadi [Zill, 2018, 267-bet].

3.3. Majburiy tebranishlar

Tashqi davriy kuch $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$ ta'sirida:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\gamma t).$$

Bir jinsli bo'lmagan tenglama. Xususiy yechim rezonans hodisasini ko'rsatadi: agar γ tizimning xususiy chastotasi ω_0 ga yaqin bo'lsa, tebranishlar amplitudasi keskin oshadi [Boyce va DiPrima, 2017, 345-bet]. Bu mexanik tizimlarda halokatli

oqibatlarga olib kelishi mumkin, shuning uchun rezonansdan qochish muhandislikda muhim masala.

3.4. *Fizik mayatnik va boshqa modellar*
Fizik mayatnik – qattiq jismning og‘irlik markazidan o‘tmaydigan o‘q atrofida tebranishi. Harakat tenglamasi:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgd \sin \theta = 0,$$

bu yerda I – inersiya momenti, d – o‘qdan og‘irlik markazigacha masofa. Kichik burchaklar uchun $\sin \theta \approx \theta$ almashtirishi bilan chiziqli tenglamaga kelinadi. Katta burchaklarda esa nochoziqli effektlar yuzaga keladi [Arnold, 2006, 210-bet].

4. Differensial tenglamalarni yechishda sonli va geometrik usullar

Analitik usullar bilan bir qatorda, amaliy masalalarda ko‘pincha sonli usullar qo‘llaniladi. Eyler usuli, Runge-Kutta usullari va chekli farqlar usuli birinchi va ikkinchi tartibli tenglamalar uchun keng tarqalgan [Kreyszig, 2015, 456-bet]. Geometrik nuqtai nazardan, izoklinlar usuli birinchi tartibli tenglamalar yechimlarining fazoviy portretini chizish imkonini beradi.

Natijalar

Quyida olib borilgan tahlillarning asosiy natijalari keltirilgan:

1. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning to‘rtta asosiy analitik usuli (o‘zgaruvchilarni ajratish, bir jinsli, chiziqli va to‘liq differensial) har xil sinfdagi tenglamalar uchun samarali ekanligi aniqlandi. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli eng sodda, ammo cheklangan; chiziqli tenglamalar usuli esa integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida keng sinfni qamrab oladi [Zill, 2018, 115-bet].
2. Ikkinchi tartibli chiziqli doimiy koeffitsiyentli tenglamalar xarakteristik tenglama orqali to‘liq yechiladi. Kompleks ildizlar holi tebranish jarayonlarini, haqiqiy ildizlar esa aperiodik o‘tish jarayonlarini ifodalaydi.
3. Mexanik modellar tahlili shuni ko‘rsatdiki:
 - a) Prujinali mayatnik ideal garmonik tebranishlarni beradi.
 - b) So‘nuvchi tebranishlar amplitudasining vaqt o‘tishi bilan pasayishi dissipativ kuchlar mavjudligida ro‘y beradi.
 - c) Majburiy tebranishlarda rezonans hodisasi muhim ahamiyatga ega va tizimning xususiy chastotasi tashqi kuch chastotasiga yaqinlashganda amplituda cheksizga (ideallashtirilgan holda) intiladi [Boyce va DiPrima, 2017, 354-bet].
 - d) Fizik mayatnik kichik tebranishlar yaqinlashuvida chiziqli modelga tushadi, katta burchaklarda esa nochoziqlilik muhim rol o‘ynaydi.

4. Analitik usullar mavjud bo'lmagan hollarda sonli usullar (masalan, Runge-Kutta) qo'llanilishi mumkin. Birinchi tartibli tenglama $y' = f(x, y)$ uchun to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli keng tarqalgan va yuqori aniqlikka ega [Kreyszig, 2015, 460-bet].

Xulosa

Ushbu maqolada birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning yechish usullari va ularning mexanik modellarga tatbiqi atroflicha o'rganildi. Birinchi tartibli tenglamalar uchun o'zgaruvchilarni ajratish, bir jinsli tenglamalar, chiziqli tenglamalar va to'liq differensial tenglamalar usullari tahlil qilindi. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar doimiy va o'zgaruvchan koeffitsiyentli hollar uchun qaraldi. Xarakteristik tenglama usuli, parametrlarni variatsiyalash va aniqlanmagan koeffitsiyentlar usullari batafsil yoritildi. Mexanik modellar sifatida prujinali mayatnik, so'nuvchi va majburiy tebranishlar hamda fizik mayatnik misollarida differensial tenglamalarning real fizik jarayonlarni qanday aniq tasvirlashi ko'rsatildi. Ushbu modellar muhandislik amaliyotida – qurilish konstruksiyalari, avtomobil osmalari, seysmik tebranishlarni yumshatish tizimlari va boshqa sohalarda keng qo'llaniladi. Kelgusida nochiziqli differensial tenglamalar, qisman hosilali differensial tenglamalar va ularning mexanik modellar bilan bog'liq murakkabroq tizimlari (masalan, turbulent oqimlar, elastiklik nazariyasi) alohida tadqiqot mavzusi bo'lishi mumkin. Shuningdek, kompyuterli modellashtirish va raqamli simulyatsiyalar differensial tenglamalarni yechishning ajralmas qismiga aylanib bormoqda.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Arnold, V. I. (2006). *Oddiy differensial tenglamalar*. Moskva: MCNMO, 156-bet.
2. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Differensial tenglamalar va chegaraviy masalalar* (10-nashr). Hoboken: Wiley, 12, 38, 345, 354-betlar.
3. Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). *Oddiy differensial tenglamalar nazariyasi*. New York: McGraw-Hill, 74, 192-betlar.
4. Euler, L. (1768). *Integral hisob instituti*, 1-jild. Sankt-Peterburg, 45-bet.
5. Kreyszig, E. (2015). *Muhandislik matematikasi* (10-nashr). Hoboken: Wiley, 143, 278, 280, 456, 460-betlar.
6. Lyapunov, A. M. (1992). *Harakat turg'unligining umumiy masalasi*. London: Taylor & Francis, 132-bet.
7. Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London, 89-bet.
8. Zill, D. G. (2018). *Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari* (9-nashr). Boston: Cengage Learning, 112, 115, 203, 267-betlar.