

TO‘LQIN TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG‘ICH VA CHEGARAVIY SHARTLI MASALALAR

Buxoro davlat universitet, Buxoro, O‘zbekiston

Elmurodova Hilola Botirovna

E-mail: h.b.elmurodova@buxdu.uz

Annotatsiya: To‘lqin tenglamasi matematik fizikaning asosiy giperbolik turdagi differensial tenglamalaridan biri bo‘lib, u mexanik tebranishlar, akustik va elektromagnit to‘lqinlar, elastik muhitlardagi jarayonlarni tavsiflashda keng qo‘llaniladi. Ushbu tenglama uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartli masalalarni o‘rganish fizik jarayonlarning real sharoitdagi rivojlanishini modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, chegaralangan sohalarda to‘lqinlarning tarqalishi, aks etishi va so‘nishi kabi hodisalarni to‘g‘ri tavsiflash masalaning dolzarbligini yanada oshiradi. To‘lqin tenglamasi uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartli masalalarni yechishda quyidagi dolzarb muammolarni ko‘rsatish mumkin:

- 1). Boshlang‘ich yoki chegaraviy shartlar aniq berilmagan yoki o‘lchash xatolari sababli masala noto‘g‘ri qo‘yilgan bo‘lishi mumkin, bu esa barqaror yechim olish uchun maxsus matematik yondashuvlarni talab etadi;
- 2). Murakkab geometrik sohalarda analitik yechimlarni topish qiyin bo‘lib, sonli va yaqinlashtiruvchi metodlardan foydalanish zarurati tug‘iladi;
- 3). Fizik muhit parametrlarining vaqt yoki fazoga bog‘liq holda o‘zgarishi to‘lqin tenglamasi yechimining xossalarini chuqur tahlil qilishni talab qiladi.

Shu sababli, to‘lqin tenglamasi uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartli masalalar yechimini o‘rganish ham nazariy, ham amaliy jihatdan dolzarb bo‘lib, u fizik jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim ilmiy ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: Maxsus funksiyalar, to‘lqin tenglamasi, Koshi masalasi, tor tebranish tenglamasi, fazo, mexanik tebranishlar, matematik modellashtirish, oddiy differensial tenglamalar, boshlang‘ich shartlar, chegaraviy shartlar, giperbolik tur.

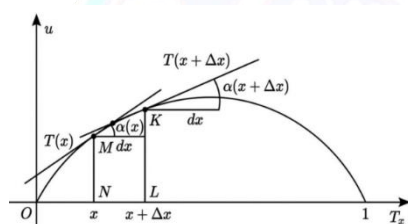
Kirish: Zamonaviy fizika va muhandislik fanlarida to‘lqin jarayonlari muhim o‘rin tutadi. Mexanik tebranishlar, akustik hodisalar, elektromagnit nurlanish, seysmik to‘lqinlar kabi ko‘plab jarayonlar to‘lqin xarakteriga ega. Ushbu hodisalarni chuqur tahlil qilish va bashorat qilish uchun ularni matematik model orqali ifodalash zarur. Matematik modellashtirish to‘lqin jarayonlarining umumiy qonuniyatlarini aniqlash imkonini beradi. Tabiatda va texnikada ko‘plab jarayonlar to‘lqin xarakteriga ega. To‘lqin jarayoni deganda muhitning muvozanat holatidan chetga chiqishi natijasida yuzaga kelgan tebranishlarning fazoda va vaqtda tarqalishi tushiniladi. Bu jarayonda muhit zarrachalari tebranish harakati qiladi, biroq moddaning umumiy ko‘chishi sodir

bo'lmaydi. To'liq jarayonlari murakkab fizik hodisa bo'lib, ularni o'rganishda matematik modellashtirish muhim ahamiyatga ega. To'liq tenglamasi va uning yechimlari orqali real jarayonlar aniq va qat'iy matematik tilda ifodalanadi. To'liq jarayonlari murakkab fizik hodisalar bo'lib, ularni o'rganishda matematik modellashtirish muhim rol o'ynaydi. To'liq tenglamasi va uning yechimlari yordamida real jarayonlar qat'iy matematik apparat asosida tavsiflanadi va tahlil qilinadi.

Asosiy qism: Tekislikda, Ox o'qi bo'ylab uchlari mahkamlangan uzunligi l ga teng bo'lgan torni (ingichka, elastik ipni) qaraylik.

Ingichka – bu torning ko'ndalang kesimi uning uzunligiga nisbatan cheksiz kichik miqdor, egiluvchan deganda tor uzunligining o'zgarishiga bog'liq bo'lmagan holda shaklini o'zgarishiga torning hech qanday qarshilik qilmasligi tushuniladi. Bu tushunchalarning matematik ma'nosi – torda sodir bo'ladigan $T(x)$ taranglik kuchi doimo uning oniy uzunligiga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

Faraz qilaylik, Ox o'q bo'yicha torning uchlarga qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan T_0 taranglik kuchi qo'yilgan bo'lsin. Agar tor tashqi kuchlar ta'sirida muvozanat holatidan chiqarilsa, u holda tor tebranma harakat qiladi. Bunda torning muvozanat holatidagi $N(x)$ nuqtasi t vaqtda M holatga o'tadi (1-shakl).



Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish uchun quyidagilarni talab qilamiz:

- 1) torning barcha nuqtalari bir tekislikda Ox o'qiga perpendikulyar tebransin, ya'ni tor ko'ndalang tebransin;
- 2) torning kichik tebranishlari hisobga olinsin;
- 3) og'irlik kuchining ta'siri inobatga olinmasin, ya'ni

taranglik kuchi shunchalik kattaki, buning natijasida og'irlik kuchining ta'siri sezilmaydi.

Torning tebranishi bir tekislikda sodir bo'layotgani uchun torning tebranish qonuni, ya'ni muvozanat holatidan og'ishi NM ikki o'zgaruvchili bitta $u(x, t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Bunda u – torning t vaqtdagi absissasi x bo'lgan N nuqtasining M nuqtasigacha muvozanat holatidan NM og'ishi.

Agar torning kichik tebranishini inobatga olsak, u holda $u(x, t)$ funksiya ham kichik va yetarlicha silliq torning x nuqtasiga t vaqtda o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti $u_x(x, t)$ ham kichik bo'ladi.

Torning tebranishi shunchalik kichik-ki, bunda

$$\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

bo'lsin. Bu torning kichik tebranishlarida uning uzunligini o'zgarmasligini bildiradi.

Haqiqatdan ham, t vaqtda torning MK yoyining uzunligi

$$l_{MK} = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \Delta x$$

formula bilan aniqlanadi.

Demak, torning kichik tebranishlarida uning uzunligi o'zgarmaydi. U holda Guk qonuniga ko'ra taranglik koeffitsiyenti T vaqtga ham x ga ham bog'liq emas va u torning barcha nuqtalarida bir xil T_0 ga teng.

Endi tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun torning MK bo'lakchasini ajratib olamiz va bunga ta'sir qilayotgan kuchlarni koordinata o'qlariga proyeksiyasini tushuramiz. Dalamber prinsipiga asosan, barcha kuchlar proyeksiyalarining yig'indisi, inersiya kuchini hisobga olganda nolga teng bo'ladi. Taranglik kuchining gorizonttal o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisi

$$F_{gor} = -T(x) \cos \alpha(x) + T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) = -T_0 \cos \alpha(x) + T_0 \cos \alpha(x + \Delta x) \equiv 0,$$

bu yerda

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \cong 1.$$

Endi taranglik kuchini vertikal o'qqa proyeksiyasini qaraylik:

$$\begin{aligned} F_{ver} &= T_0 \sin \alpha(x) - T_0 \sin \alpha(x + \Delta x) \\ &= T_0 \left(\frac{\tan \alpha(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (\tan \alpha(x + \Delta x))^2}} - \frac{\tan \alpha(x)}{\sqrt{1 + (\tan \alpha(x))^2}} \right) \\ &= T_0 \left(\frac{u_x(x + \Delta x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x + \Delta x, t)}} - \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \right) \\ &\cong T_0 [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \end{aligned}$$

Oxirgi formuladan Lagranj teoremasiga asosan

$$F_{ver} \cong T_0 u_{xx}(x', t), \quad x' \in (x, x + \Delta x)$$

kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $p(x, t)$ – torning MK bo'lagiga ta'sir qilayotgan uzluksiz tashqi kuch, $\rho(x)$ esa torning uzluksiz chiziqli zichligi bo'lsin. U holda tashqi kuchlarning Ou o'qiga proyeksiyasi

$$F_{tashqi} \cong p(x, t) \Delta x$$

bo'ladi. Torning zichligi $\rho(x)$ bo'lgani uchun uning MK bo'lagining massasi

$$m \cong \rho(x) \Delta x$$

ga teng.

Nyuton qonuniga ko'ra inersiya kuchi

$$F_{in} = ma \cong \rho(x) \Delta x u_{tt}(x'', t), \quad x'' \in [x, x + \Delta x]$$

formula bilan aniqlanadi.

U holda barcha kuchlarning Ou o'qdagi proyeksiyasi

$$T_0 u_{xx}(x', t) \Delta x - \rho(x) u_{tt}(x'', t) \Delta x + p(x, t) \Delta x = 0$$

formula bilan ifodalanadi.

Bu tenglikni $\Delta x \neq 0$ ga qisqartirib, so'ngra $\Delta \rightarrow 0$ limitga o'tsak,

$$T_0 u_{xx}(x, t) - \rho(x) u_{tt}(x, t) + p(x, t) = 0 \quad (1)$$

torning majburiy tebranish tenglamsiga ega bo'lamiz.

Agar tor bir jinsli bo'lsa, ya'ni $\rho(x) = \text{const}$, u holda (1) tenglama quyidagi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (2)$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}.$$

Agar (1) yoki (2) tenglamada tashqi kuchlar qatnashmasa, ya'ni $p(x, t) \equiv 0$ bo'lsa, u holda (2) tenglama ushbu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (3)$$

ko'rinishga keladi.

Oxirgi (3) tenglama bir jinsli torning erkin tebranish tenglamasi deyiladi. Bu tenglama bir o'lchovli to'lqin tarqalish tenglamasi deb ham yuritiladi.

Sterjenning bo'ylama tebranishlari, trubkadagi gazning tebranishlari va boshqa tebranma harakatlar (1) ko'rinishdagi tenglama orqali ifodalanadi.

Adabiyotni o'rganish: Ushbu ishda matematik analiz, funksional analiz, oddiy differensial tenglamalar, matematik fizik tenglamalarining to'g'ri masalasi nazariyasi o'rganilgan.

Xulosalar: Ushbu ishda to'lqin tenglamasi uchun boshlang'ich va chegaraviy shartli masalalar, to'lqin tenglamalari uchun Koshi masalasi, to'lqin tenglamasi va uning yechimlari orqali real jarayonlar aniq va qat'iy matematik tilda ifodalanadi. To'lqin jarayonlari murakkab fizik hodisalar bo'lib, ularni o'rganishda matematik modellashtirish muhim rol o'ynaydi. To'lqin tenglamasi va uning yechimlari yordamida real jarayonlar qat'iy matematik apparat asosida tavsiflanadi va tahlil qilinadi

Adabiyotlar ro'yxati:

1. Salohiddinov M.S. "Matematika fizika tenglamalari". Toshkent. "O'zbekiston", 2002.
2. Zikirov O.S. "Matematika fizika tenglamalari". Toshkent. "Fan va texnologiya". O'zMU. 2017.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: "Наука". 2004.-432 с.
4. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1976.-296 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Изд-во "Наука". 1981.- 512 с.

6. Жўраев Т.Ж., Абдиназаров С. Математик физика тенгламалари. Тошкент. ЎзМУ. 2003.- 332 б.
7. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. Тошкент. "Ўзбекистон", 2002.- 445 б.
8. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1976.-296 с.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Изд-во "Мир". 1964.-830 с.
10. www.wikipedia.ru
11. www.ziyonet.uz
12. www.edu.uz
13. www.edu.ru