

ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK TENGLAMASINING GRIN FUNKSIYASI YORDAMIDA YECHILISHI

Buxoro davlat universitet, Buxoro, O'zbekiston

Elmuradova Hilola Botirovna

E-mail: h.b.elmurodova@buxdu.uz

Annotatsiya: Ma'lumki, issiqlik tarqalishi va diffuziya jarayonlarini o'rganishda statsionar bo'lmagan parabolik tenglamalarni yechish asosiy o'rinni egallaydi. Ko'p hollarda texnik muammolar yoki fizik tajribalar murakkab geometrik shaklga ega bo'lgan chegaralangan sohalarda kechadi. Bunday sharoitda an'anaviy o'zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli har doim ham chekli integral ko'rinishidagi yechimni bera olmaydi, chunki chegaraviy shartlarning murakkabligi hisoblash ishlarini qiyinlashtirib yuboradi. Klassik chegaraviy masalalarni integrallash va ularning yechimlarini yaqqol analitik ko'rinishda ifodalashda Grin funksiyasi (yoki manba funksiyasi) usuli eng mukammal apparatlardan biri hisoblanadi. Grin funksiyasi murakkab differensial operatorlarni integral operatorlar ko'rinishiga o'tkazish orqali masalaning yechimi mavjudligi, yagonaligi va turg'unligini sifat jihatidan tahlil qilish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, boshlang'ich shart, chegaraviy shart, Koshi masalasi, chegaraviy masalalar, Grin funksiyasi, differensial tenglama, fundamental yechim, integral ifoda, matematik fizika, Dirak delta funksiyasi.

Kirish: Mazkur ishida klassik darsliklardagi tayyor formulalarni shunchaki qo'llash bilan cheklanib qolinmasdan, balki issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining maxsus chegaralangan sohalardagi yechimlarini topishda aks ettirish (simmetriya) usuli va Furye integral almashtirishlarining birgalikdagi kombinatsiyasi tahlil etilgan. Shuningdek, aniq turdagi chegaraviy shartlar uchun Grin funksiyasining maxsus nuqtalardagi xulq-atvori va uning chegaralanganlik shartlari yangicha yondashuvlar asosida tekshirilgan.

Asosiy qism: Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi matematik fizikaning fundamental tenglamalaridan biri bo'lib, muhitda issiqlik energiyasining vaqt davomida tarqalish jarayonini tavsiflaydi. Ushbu tenglama qattiq jismlar, suyuqliklar va gazlardagi temperatura maydonining evolyutsiyasini o'rganishda muhim ahamiyatga ega. Zamonaviy amaliy masalalarda, xususan, texnika, mexanika, geofizika, energetika va qurilish muhandisligida issiqlik almashinuvi jarayonlarini modellashtirishda ushbu tenglamadan keng foydalaniladi.

Issqlik o'tkazuvchanlik nazariyasining matematik modeli energiyaning saqlanish qonuni hamda Furiye qonuniga asoslanadi. Furiye qonuniga ko'ra, issqlik oqimi temperatura gradiyentiga proporsional bo'lib, yuqori temperaturali nuqtadan past temperaturali nuqtaga yo'naladi.

Bir jinsli va izotrop muhit uchun bir o'lchovli issqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

Bu yerda

- $u(x, t)$ – muhitning x nuqtasidagi t vaqtdagi temperaturasi;
- a^2 – issqlik tarqalish koeffitsiyenti;
- $f(x, t)$ – ichki issqlik manbai funksiyasi;
- x – fazoviy koordinata;
- t – vaqt parametri.

Agar muhitda ichki issqlik manbai mavjud bo'lmasa, ya'ni $f(x, t) = 0$, tenglama quyidagi sodd ko'rinishga keladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

Mazkur tenglama parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglama hisoblanadi. Tenglamaning yechimi yagona bo'lishi uchun unga boshlang'ich va chegaraviy shartlar biriktiriladi.

Birinchi tur chegaraviy shartlar. Bir o'lchovli issqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi tur chegaraviy shartlar quyidagicha yoziladi; (l uzunlikka ega bo'lgan sterjen uchun)

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0 \quad (3)$$

Bu yerda:

- $u(0, t)$ va $u(l, t)$ – sterjenning chap va o'ng uchlaridagi temperaturalar;
- $\mu_1(t), \mu_2(t)$ – vaqtga bog'liq ravishda berilgan temperatura funksiyalari.

Agar chegaralarda temperatura o'zgarmas bo'lsa, masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (4)$$

Bunday chegaraviy shartlar fizik jihatdan sterjen uchlari doimiy temperatura ostida ushlab turilganligini anglatadi.

Birinchi tur chegaraviy masalalar issqlik almashinuvi jarayonlarini modellashtirishda keng qo'llaniladi va ularni yechishda Furiye usuli hamda Grin funksiyasi metodlari samarali hisoblanadi.

Ikkinchi tur chegaraviy shartlar. Ikkinchi tur chegaraviy shartlarda chegaradagi temperatura emas, balki issqlik oqimi yoki temperatura gradiyenti

beriladi. Ushbu shartlar *Neyman sharti* yoki *Neyman masalasi* deb ataladi. Furye qonuniga ko'ra issiqlik oqimi temperatura gradiyentiga proporsional bo'lganligi sababli, ikkinchi tur chegaraviy shart quyidagi ko'rinishda ifodalanadi: (l uzunlikka ega bo'lgan sterjen uchun)

$$u_x(0, t) = v_1(t), \quad u_x(l, t) = v_2(t) \quad (5)$$

Bu yerda:

- u_x – temperatura gradiyenti;
- $v_1(t), v_2(t)$ – chegaradagi issiqlik oqimini ifodalovchi funksiyalar.

Agar chegaradan issiqlik o'tmasa, ya'ni jism issiqlik jihatdan izolyatsiyalangan bo'lsa, u holda:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 \quad (6)$$

ko'rinishdagi chegaraviy shart hosil bo'ladi.

Uchinchi tur chegaraviy shartlar. Uchinchi tur chegaraviy shartlar issiqlik o'tkazuvchanlik nazariyasida eng muhim chegaraviy shartlardan biri hisoblanadi. Bu turdagi shartlarda jism chegarasidagi temperatura bilan tashqi muhit orasidagi issiqlik almashinuvi hisobga olinadi. Mazkur shartlar fizik jihatdan konvektiv issiqlik almashinuvi jarayonlarini tavsiflaydi va Isaak Nyutonning so'vish qonuniga asoslanadi.

Uchinchi tur chegaraviy shartlar *Robin sharti* yoki *Robin tipidagi chegaraviy shartlar* deb ham ataladi.

- Bir o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun uchinchi tur chegaraviy shart quyidagi ko'rinishda yoziladi: (l uzunlikka ega bo'lgan sterjen uchun)

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = v_1(t), \quad u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = v_2(t) \quad (7)$$

bu yerda $h_1 = \text{const} > 0$; $h_2 = \text{const} > 0$.

Mazkur shartlardan ko'rinadiki, chegaradan chiqayotgan issiqlik oqimi jism temperaturasi bilan tashqi muhit temperaturasi orasidagi farqqa proporsional bo'ladi.

Shunday qilib, uchinchi tur chegaraviy shartlar birinchi va ikkinchi tur chegaraviy shartlarning umumlashgan ko'rinishi hisoblanadi hamda real fizik jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi.

Bu chegaraviy shartlar $u(x, t)$ funksiyaga nisbatan chiziqlidir.

Adabiyotni O'rganish:

Parabolik va elliptik turdagi tenglamalar uchun Grin funksiyasini qurish va uning xususiyatlarini tahlil qilish borasida jahon miqyosida va mamlakatimizda yirik ilmiy maktablar yaratilgan. Xususan, ushbu yo'nalishda xorijiy olimlardan J.Adamard, R.Kurant, A.Tixonov, hamda yurtimiz matematik olimlaridan akademik T.Jo'rayev, T.Aliqulov, M.Salohiddinov va ularning shogirdlari tomonidan ko'plab fundamental tadqiqotlar o'tkazilgan[4],[5]. Biroq, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining ko'p o'lchamli sohalaridagi nostandart chegaraviy shartlari uchun Grin funksiyasini aniq

(analitik) ko‘rinishda hisoblash masalalari hamon yangi va chuqur izlanishlarni talab etmoqda.

Xulosalar: Xususiyl hosilali differensial tenglamalarni integral tenglamalarga keltirish va ularni maxsus yadrolar yordamida yechish nazariyasi uzoq tarixga ega. Grin funksiyasi tushunchasi birinchi marta ingliz matematigi Jorj Grin tomonidan XIX asrda elektrostatika va magnetizm muammolarini yechish uchun taklif etilgan bo‘lsa-da, keyinchalik bu usul matematik fizika tenglamalarining barcha turlari uchun fundamental yondashuvga aylandi.

Adabiyotlar ro‘yxati:

1. Alikulov T.A. Differensial tenglamalar kursi. – Toshkent: "Nafis", 2011.
2. Durdiyev D.Q. Matematik fizika tenglamalari (Ma'ruzalar matni). – Buxoro: "BuxDU", 2014.
3. Durdiyev D.Q. Xususiyl hosilali differensial tenglamalar kursi. – Toshkent: "Turon-Iqbol", 2018.
4. Durdiyev D.Q., Safarov J.Sh. Parabolik tenglamalar uchun ba'zi teskari masalalar haqida. // O‘zbekiston matematika jurnali. – Toshkent, 2016. - №3.
5. Durdiyev D.Q., Totayeva J.D. Differensial tenglamalar (O‘quv qo‘llanma). – Buxoro: "Durdona", 2020.
6. Jo‘rayev T.J. Xususiyl hosilali differensial tenglamalar. – Toshkent: "Universitet", 2000.
7. www.mathnet.ru – Butunrossiya matematik portali (Elektron resurs).
8. www.ziyouz.com – Elektron kutubxona portali (Elektron resurs)