

TOPOLOGIYADA METRIK VA TOPOLOGIC FAZOLAR TALQINI

Sevara Saliyeva Ma'mirbek qizi*Andijon davlat pedagogika insituti**Matematika-informatika kafedrasi o'qituvchisi***Ganiyeva Malika Murodjon qizi***Andijon davlat pedagogika insituti**Matematika yo'nalishi talabasi***Matqurbonova Moxichexra Anvarjon qizi***Andijon davlat pedagogika insituti**Texnologik ta'lim yo'nalishi talabasi**ganiyevamalika40@gmail.com*

Kalit so'zlar: Metrika, topologiya, metrik fazo, topologik fazo, fundamental, ochiq to'plam, to'la metrik fazo, Koshi teoremasi, Bazas fazo, Evklid fazosi

Keywords: Metrics, topology, metric space, topological space, fundamental, open set, full metric space, Koshi theorem, base space, Euclidean space

Annotatsiya

Ushbu maqolada metrik fazolar, va metrikaga oid asosiy tushunchalar, ularning matematik xossalari hamda topologik fazolar ham yoritilgan. Ishda metrika, ochiq va yopiq to'plamlar, shar, sfera, fundamental ketma-ketlik va to'la metrik fazo tushunchalari izchil ravishda ta'riflanadi. Shuningdek, Yevklid fazosi va uzluksiz funksiyalar fazosi misolida metrik fazolarning amaliy qo'llanilishi ko'rsatib o'tilgan. Maqola topologik va metrik fazolarning umumiylik jihatlarini o'rganish orqali ularning matematik tahlildagi o'rnini ochib beradi

Annotation

This article examines the fundamental concepts of metric spaces and metrics, their mathematical properties, and their relation to topological spaces. It provides consistent definitions of metrics, open and closed sets, balls, spheres, fundamental sequences, and complete metric spaces. Examples such as Euclidean spaces and spaces of continuous functions are presented to illustrate the practical applications of metric spaces. The study highlights the connection between metric and topological spaces, emphasizing their significance in mathematical analysis and theoretical research.

Kirish

Topologiya tushunchasi XIX asr da N.I.Lobachevskiy, B. Riman, A.Puankare, D.Gilbert kabi buyuk matematiklar ishlarida paydo bo'lgan. Shakllarning geometrik xossalari ularning metric xossalari bilan aniqlanmaydi deb ta'kidlagan. Topologik usullar yordamida shakllarning xossalari yorqin namoyon bo'ladi.

Metrik fazolarda asosiy tushunchalar atrof hamda ochiq to'plam tushunchalari yordamida kiritilgan edi. Bunda atrof va ochiq to'plam tushunchalari masofa orqali aniqlangan edi. Endi ochiq to'plam tushunchasi topologiya aksiomalari orqali aniqlanib, nuqtaning atrofi sifatida shu nuqtani o'z ichiga olgan ochiq to'plam tushuniladi. Metrik fazolar topologik fazolarning muhim sinfini tashkil etadi. Bu fazolarda ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi kiritiladi va buning yordamida nuqtalarning bir-biriga yaqinligi o'rganiladi. Metrik fazolarda ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasidan foydalanib, nuqtadan to'plamgacha masofa tushunchasi aniqlanadi. Birinchi kursda o'rganilgan Yevklid fazolari metrik fazoga misol bo'ladi.

Asosiy qism

Metrik fazo – bu biror bo'sh bo'lmagan to'plamdagi ikki element orasidagi masofani aniqlash ma'lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma'lum bir shartlarni yoki akslantirishlarni qanoatlantirishi shart bo'ladi. Bu shartlar masofa yoki metrika aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tadbiiq etiladi. Fazoda ikki nuqta orasidagi masofa ma'lum bo'lsa, nuqtalarning o'zaro yaqinligini, nuqta va to'plamning, ikki to'plamning yaqinligini aniqlasa bo'ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalarini o'rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Topologik fazo — bu biror to'plam va undagi maxsus tanlangan ochiq to'plamlar sistemasidan tashkil topgan juftlikdir. Bu ochiq to'plamlar yordamida fazoda yaqinlik, uzluksizlik, yopiq to'plam, chegarali to'plam kabi tushunchalar aniqlanadi.

Boshqacha aytganda, topologik fazo — bu fazodagi nuqtalar orasidagi munosabatni masofa orqali emas, balki ochiq to'plamlar orqali tavsiflovchi umumiy matematik tuzilma bo'lib, u metrik fazo tushunchasini kengaytiradi.

Bo'sh bo'lmagan X -to'plam berilgan bo'lsin.

Bizga $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$ funksiya berilib, u quyidagi

$$1) d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2) d(x, y) = d(y, x)$$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ shartlarni qanoatlantirsa, d - funksiya X to'plamdagi metrika yoki masofa, (X, d) juftlik esa metrik fazo deyiladi.

$S_r(x_0) = \{x \in (X, d), d(x, x_0) = r\}$ to'plamdan iboratdir.

Bizga $A \subset (X, d)$ qism to'plam va $x \in (X, d)$ nuqta berilgan bo'lsa, x nuqtadan radiusi r nuqtadan A to'plamgacha bo'lgan masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Birorta chekli radiusli $B_r(x_0)$, $0 < r < \infty$ ochiq shar uchun quyidagi munosabat $A \subset B_r(x_0)$ bajarilsa, u holda A to'plam chegaralangan deyiladi.

Bizga $A \subset (X, d)$ qism to'plam va $x \in (X, d)$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $r > 0$ soni mavjud bo'lib, $B_r(x) \subset A$ munosabat o'rinli bo'lsa, x nuqta A to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. A to'plamning barcha ichki nuqtalari to'plami uning ichi deyiladi va int A kabi belgilanadi. Biror $x \in (X, d)$ nuqta va $A \subset (X, d)$ to'plam uchun $d(x, A) = 0$ munosabat bajarilsa, x nuqta A to'plamning urinish nuqtasi deyiladi. A to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat to'plam uning yopig'i deyiladi va $\bar{A}$ ko'rinishda belgilanadi. Berilgan $A \subset (X, d)$ to'plamning to'ldiruvchisi, ya'ni $X \setminus A$ to'plam ochiq bo'lsa, A to'plam yopiq to'plam deyiladi. Tekshirib ko'rish mumkinki, A to'plamning yopiq bo'lishi $A = \bar{A}$ munosabatga teng kuchlidir. Bizga (X, d) metrik fazoda $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligi va $x \in (X, d)$ nuqta berilgan bo'lsin.

Bizga (X, d) metrik fazoda $\{x_n\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy yetarlicha kichik, musbat $\varepsilon > 0$ son uchun $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lib, n_0 sonidan katta barcha m va n natural sonlar uchun $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental (Koshi ketma-ketligi) deyiladi. Agar (X, d) fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, **(X, d) to'la metrik fazo deyiladi.**

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun chekli sondagi ε radiusli sharlarning birlashmasidan iborat metrik fazo to'liq chegaralangan metrik fazo deyiladi.

n haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ to'plami

R^n $\rho(x, y) = [\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2]^{1/2}$ metrik funksiya bilan n – o'lchovli arifmetik Evklid fazosi deyiladi.

Bu metric funksiyaning 1- va 2- aksiomalarini qanoatlantirishi ravshan. Faraz qilaylik, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ bo'lsin. U holda uchburchak aksiomasi quyidagicha yoziladi:

$$[\sum_{k=1}^n (z_k - x_k)^2]^{1/2} \leq [\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2]^{1/2} + [\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2]^{1/2} \quad (1)$$

$y_k - x_k = a_k, z_k - y_k = b_k$, belgilab, $z_k - x_k = a_k + b_k$ ni olamiz va (1) tengsizlikka qo'yamiz

$$[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2]^{1/2} \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{1/2} \quad (2)$$

Bu tengsizlik esa $(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$ ma'lumki Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, oxirgi tengsizlikka ko'ra $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2(\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2)^{1/2} = [\sum_{k=1}^n a_k^2]^{1/2} + [\sum_{k=1}^n b_k^2]^{1/2}$.

Shunday qilib, (2) tengsizlik, u bilan birga (1) tengsizlik ham isbotlandi. Demak, R^n fazo metrik fazo ekan.

Ta'rif. $C[a, b] - [a, b]$ oraliqda uzluksiz haqiqiy funksiyalar fazosi $\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$

Masofa bilan metric fazoni tashkil etadi.

To'la metrik fazolar. Matematik analizda son o'qining to'laligi, ya'ni har qanday haqiqiy sonlarning fundamental ketma-ketligining biror limitga intilishi qay

darajada muhim ekanligi ta'kidlanadi. Sonlar to'g'ri chizig'i to'la metric fazolarga eng oddiy misol bo'la oladi.

Ta'rif. Agar R metrik fazoda har qanday fundamental ketma –ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uholda bunday fazo to'la fazo deyiladi.

Na'muna: R^1 ning to'laligi Koshi teoremasidan kelib chiqadi.

R^n ning to'laligi R^1 ning to'laligidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan ham $\{x^{(p)}\}$ - R^n fazoning fundamental nuqtalari ketma ketligi bo'lsin. Buning ma'nosi shuki, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunaqa $N=N_r$ son topilib, $\sum_{k=1}^n (x_k^{(p)} - x_k^q)^2 < \varepsilon^2$ barcha $p, q > N$, bu yerda har bir $k=1, 2, \dots, n$ qiymatlarda $x_k^{(p)}$ koordinatalar va barcha $p, q > N$ uchun

$|x_k^{(p)} - x_k^q| < \varepsilon$, ya'ni $\{x_k^{(p)}\}$ – fundamental sonli ketma ketlik. U holda $x_k = \lim_{p \rightarrow \infty} x_k^{(p)}$ va

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ deb olsak, tushunarliki, $\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = x$, ya'ni R^n to'la metric fazodir.

Bu fazo haqida to'plangan oldingi ma'lumotlarni ham nazarga olib, u Banaz fazosi ekan degan xulosaga kelamiz.

Xulosa: Metrik fazolar matematik analiz va topologiyaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Ular fazodagi nuqtalar orasidagi munosabatni metrika orqali o'lchash imkonini beradi. Metrika yordamida ochiq va yopiq to'plamlar, shar, sfera, fundamental ketma-ketlik hamda to'la metrik fazo kabi ko'plab tushunchalar aniqlanadi. Metrik fazolar yordamida uzluksizlik, yaqinlashuv va chegaralilik tushunchalari aniq matematik asosda ifodalanadi. Ayniqsa, Yevklid fazosi va uzluksiz funksiyalar fazosi misolida metrik fazolarning amaliy qo'llanilishi yaqqol ko'rinadi. Shunday qilib, metrik fazolar nazariyasi topologiya va matematik tahlilning rivojlanishida muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. To'xtayev M. Matematik analiz asoslari. — Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2019.
2. Худайберганов А. Topologiya asoslari. — Toshkent: Fan nashriyoti, 2020.
3. James R. Munkres. Topology. — 2nd Edition. Pearson, 2014.
4. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. — Dover Publications, 1999.
5. Willard, S. General Topology. — Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
6. Croom, F. H. Principles of Topology. — Saunders College Publishing, 1989.