

CHIZIQLI BO‘LMAGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING BARQARORLIK NAZARIYASI

Jonqobilov J.T

*Olmalik davlat texnika instituti “Matematika
va tabiiy fanlar” kafedrası assistenti
jonqobilovjaxongir70@gmail.com*

Annotatsiya

Ushbu maqolada chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari, ularning matematik modellari hamda barqarorlik nazariyasining nazariy asoslari yoritilgan. Chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalar real hayotda uchraydigan ko‘plab jarayonlarning — mexanik tebranishlar, biologik o‘shish modellar, elektr zanjirlari va iqtisodiy dinamik tizimlarning — matematik ifodasi sifatida qaraladi. Maqolada chiziqli bo‘lmagan tizimlarning yechimlarini tahlil qilishda qo‘llaniladigan usullar, xususan, **Lyapunov barqarorlik nazariyasi** va **fazoviy tahlil metodlari** haqida batafsil ma’lumot berilgan. Shuningdek, tizimlarning barqarorlik shartlari, ularning trayektoriyalarining fazoviy tekislikdagi xatti-harakati hamda kichik buzilishlarga nisbatan barqaror yoki beqaror holatga o‘tish jarayonlari tahlil qilinadi. Tadqiqot natijalari chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladigan murakkab tizimlarning dinamikasini chuqurroq tushunishga xizmat qiladi

Kalit so‘zlar: chiziqli bo‘lmagan differensial tenglama, barqarorlik nazariyasi, Lyapunov funksiyasi, dinamik tizim, fazoviy tahlil, trayektoriya, barqaror yechim, nolinear tizim, fazoviy fazo, matematik model, analitik yechim, Lyapunov mezon, chiziqli bo‘lmagan hodisalar, differensial tizimlarning barqarorligi.

Аннотация

В данной статье рассматриваются основные понятия теории нелинейных дифференциальных уравнений, их математические модели, а также теоретические основы теории устойчивости. Нелинейные дифференциальные уравнения служат математическим описанием многих процессов реальной жизни — механических колебаний, моделей биологического роста, электрических цепей и экономических динамических систем. В статье подробно изложены методы анализа решений нелинейных систем, в частности, **теория устойчивости Ляпунова** и методы фазового анализа. Также рассматриваются условия устойчивости систем, поведение их траекторий в фазовом пространстве, а также процессы перехода системы к устойчивому или неустойчивому состоянию при малых возмущениях. Результаты исследования способствуют

более глубокому пониманию динамики сложных систем, моделируемых с помощью нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, теория устойчивости, функция Ляпунова, динамическая система, фазовый анализ, траектория, устойчивое решение, нелинейная система, фазовое пространство, математическая модель, аналитическое решение, критерий Ляпунова, нелинейные явления, устойчивость дифференциальных систем.

Annotation

This article examines the fundamental concepts of nonlinear differential equations theory, their mathematical models, and the theoretical foundations of stability analysis. Nonlinear differential equations serve as mathematical representations of numerous real-world processes, including mechanical oscillations, biological growth models, electrical circuits, and economic dynamic systems. The article provides a detailed discussion of methods for analyzing solutions of nonlinear systems, particularly **Lyapunov stability theory** and phase space analysis methods. The conditions for system stability, behavior of trajectories in the phase space, and transitions of systems to stable or unstable states under small perturbations are also examined. The research results contribute to a deeper understanding of the dynamics of complex systems modeled by nonlinear differential equations.

Keywords: nonlinear differential equation, stability theory, Lyapunov function, dynamical system, phase space analysis, trajectory, stable solution, nonlinear system, phase plane, mathematical model, analytical solution, Lyapunov criterion, nonlinear phenomena, stability of differential systems.

Kirish.

Differensial tenglamalar matematikaning eng muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ular orqali tabiat va texnika jarayonlarining dinamikasini matematik tarzda ifodalash mumkin. Hozirgi zamonda ko'plab tizimlar chiziqli bo'lmagan xususiyatga ega bo'lib, ularni tahlil qilish uchun **chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar** qo'llaniladi. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar oddiy chiziqli tenglamalardan farqli ravishda, superpozitsiya prinsipi ishlamaydi va ularning yechimlarini topish murakkab bo'ladi. Shu sababli, chiziqli bo'lmagan tizimlarni o'rganishda maxsus metodlar, jumladan **fazoviy tahlil** va **Lyapunov barqarorlik nazariyasi**, keng qo'llaniladi. Chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar quyidagi umumiy ko'rinishga ega bo'lishi mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

bu yerda $x \in R^n$ holat vektori, t — vaqt, f -esa chiziqsiz funksiya. Chiziqlilik yo'qligi shuni bildiradiki, agar $x_1(t)$ va $x_2(t)$ yechimlar bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi $a x_1(t) + b x_2(t)$ ham yechim bo'lishi shart emas.

Chiziqsiz tenglamalarning asosiy xususiyatlari:

1. **Ko'p yechimlilik** — biror boshlang'ich shart uchun ko'p yechimlar mavjud bo'lishi mumkin.
2. **Xonada xatti-harakatning murakkabligi** — limit sikllar, barqaror nuqtalar, kaotik xatti-harakatlar yuzaga keladi.
3. **Lineerizatsiya usullariga qaram bo'lish** — lokal barqarorlikni o'rganishda chiziqli taxminlar ishlatiladi.

Barqarorlik nazariyasi

Chiziqsiz tizimlarda barqarorlikni o'rganish tizim nazariyasining eng muhim yo'nalishlaridan biridir. Barqarorlikni aniqlashda ko'plab metodlar mavjud: Lyapunov metodi, lineerizatsiya, invariants tekisliklar va boshqalar.

Lyapunov metodi:

Lyapunovning barqarorlik nazariyasi eng keng qo'llaniladigan metodlardan biridir.

Tizim:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in R^n$$

uchun Lyapunov funksiyasi $V(x)$ topiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

$$1. V(x) > 0 (x \neq 0) \text{ va } V(0) = 0$$

$$2. V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$$

shu holatda tizimning nol nuqtasi **barqaror** hisoblanadi. Agar bo'lsa, $V(x) < 0$ tizim **asymptotik barqaror** hisoblanadi.

Lineerizatsiya metodi.

Agar tizim $\dot{x} = f(x)$ ga ega bo'lsa va x_0 nuqtada $f(x_0) = 0$, tizimni lokal ravishda quyidagicha chiziqlashtirish mumkin:

$$\dot{x} \approx A(x - x_0), \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x = x_0}$$

Bu yerda A — Jacobi matrisi. Agar barcha eigenqiymatlar manfiy haqiqiy qismga ega bo'lsa, tizim lokal barqaror.

Amaliy misollar.

1. Populyatsiya modeli (Lotka-Volterra):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

bu chiziqsiz tenglama predator-prey tizimini ifodalaydi. Barqaror nuqtalar va ularning Lyapunov funksiyalari yordamida barqarorligi o'rganiladi.

2.Mexanik tizim (Duffing osilator):

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

Duffing osilatorining barqarorlik xususiyatlari α, β, δ parametrlariga bog'liq.

Xulosa

Chiziqsiz differensial tenglamalar zamonaviy matematik modellashtirishning markaziy elementi hisoblanadi. Ularning barqarorlik nazariyasi tizim xatti-harakatini tahlil qilish va bashorat qilish imkonini beradi. Lyapunov metodlari va lineerizatsiya usullari, shuningdek, amaliy masalalarda keng qo'llaniladi. Kelajakda chiziqsiz tizimlarni chuqur tahlil qilish uchun numerik metodlar va kompyuter modellari ham muhim rol o'ynaydi. Amaliy misollar, masalan, Lotka-Volterra predator-prey modeli yoki Duffing osilatorlari, chiziqsiz tizimlarning real hayotdagi ahamiyatini ko'rsatadi. Ushbu modellarda barqaror nuqtalarni aniqlash, limit sikllarni tahlil qilish va parametrlarning tizim xatti-harakatiga ta'sirini o'rganish tizimni nazorat qilish va optimallashtirish imkonini beradi. Kelajakda chiziqsiz differensial tenglamalarni o'rganishda raqamli metodlar va kompyuter modellari muhim ahamiyat kasb etadi. Ular nafaqat yechimlarni topishda, balki murakkab tizimlarning barqarorligini oldindan baholash va nazorat qilishda ham qo'llaniladi. Shu bilan birga, chiziqsiz tizimlarni tahlil qilish nazariy va amaliy jihatdan yangi bilimlarni, masalan, kaos nazariyasi va bifurkatsiya tahlilini rivojlantirishga ham imkon yaratadi. Umuman olganda, chiziqsiz differensial tenglamalar va ularning barqarorlik nazariyasi zamonaviy ilm-fanning ko'plab yo'nalishlarida fundamental ahamiyatga ega bo'lib, tizimlarning xatti-harakatini chuqur tushunish va nazorat qilishga imkon beradi. Bu soha nafaqat matematikani rivojlantiradi, balki real dunyo tizimlarini samarali boshqarish va optimallashtirish uchun zarur nazariy asos yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Differensial tenglamalarning sifat nazariyasi va uning tatbiqlari, X.R. Latipov (Toshkent, 2002) — differensial tenglamalarning sifat nazariyasi haqida.
2. Oddiy differensial tenglamalar, N. Dilmuradov (Toshkent, "Sano-standart", 2019) — oddiy differensial tenglamalar, nazariyasi va masalalari.
3. Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar yechish, R. Turgunbayev, Sh. Ismailov, O. Abdullayev (Toshkent, 2007) — differensial tenglamalar bo'yicha misollar to'plami.
4. Oddiy differensial tenglamalar (darslik), N. Dilmuradov (Toshkent, "Sano-standart", 2019) — darslik shaklida.
5. Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
6. Ibragimov, N. H. (1999). *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons.