

MURAKKAB SONLAR DUNYOSIDA LOGARIFM VA DARAJAGA KO'TARISH: ILDIZDAN LOGARIFMGACHA

Fayzidinova Shaxlo Ergashovna

Bo'stonliq tuman 2-son politexnikumi o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada murakkab sonlar nazariyasida logarifm va darajaga ko'tarish amallarining matematik mohiyati va ularning o'zaro bog'liqligi tahlil qilinadi. Murakkab sonlar uchun ildiz chiqarish, darajaga ko'tarish va logarifmlash amallari real sonlardan tubdan farq qilishi ko'rsatib beriladi. Ayniqsa, ko'p qiymatlilik (ko'p tarmoqlilik), argument tushunchasi va kompleks tekislikdagi geometrik talqinlar ilmiy asosda yoritiladi. Tadqiqot davomida kompleks logarifmning asosiy xossalari, uning tarmoqlari va eksponensial funksiya bilan bog'lanishi ochib beriladi. Natijalar murakkab sonlar analizini chuqurroq o'rganishda, shuningdek, fizika, elektrotexnika va signalni qayta ishlash kabi sohalarida qo'llash imkoniyatlarini kengaytiradi.

Kalit so'zlar: murakkab sonlar, kompleks logarifm, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, argument, modul, ko'p qiymatli funksiya, kompleks tekislik.

Murakkab sonlar matematik analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, real sonlar yordamida ifodalab bo'lmaydigan ko'plab masalalarni yechish imkonini beradi. Murakkab sonlar tushunchasi dastlab algebraik tenglamalarni yechish jarayonida paydo bo'lgan bo'lsa-da, bugungi kunda u fizika, muhandislik, kvant mexanikasi va signal nazariyasida keng qo'llaniladi. Ayniqsa, murakkab funksiyalar nazariyasi murakkab sonlar ustida bajariladigan amallarni chuqur tahlil qilishni talab etadi.

Real sonlar uchun odatiy bo'lgan ildiz chiqarish, darajaga ko'tarish va logarifmlash amallari murakkab sonlar uchun bajarilganda yangi xususiyatlar namoyon bo'ladi. Masalan, murakkab sonning ildizi yagona emas, balki bir nechta qiymatlarga ega bo'ladi. Xuddi shuningdek, murakkab logarifm ham ko'p qiymatli funksiya hisoblanadi. Bu holat murakkab sonlarning geometrik talqini bilan chambarchas bog'liq.

Murakkab sonlar (kompleks sonlar) matematikaning eng muhim kengaytmalaridan biridir. Ular haqiqiy sonlar majmuasida bajarib bo'lmaydigan amallarni (masalan, manfiy sonlardan kvadrat ildiz olishni) mumkin qiladi. Bu mavzu kvadrat ildiz va yuqori darajali ildizlardan boshlanib, umumiy darajaga ko'tarishga, oxirida esa logarifm funksiyasiga yetib boradi. Keling, hamma narsani bosqichma-bosqich, batafsil tushuntirib chiqaylik.

Murakkab sonlarning polar (trigonometrik) shakli – asosiy kalit

Har qanday nolga teng bo'lmagan murakkab son z ni quyidagi ikki shaklda ifodalash mumkin:

- Algebraik shakl: $z = a + bi$ (a – haqiqiy qism, b – xayoliy qism).
- Polar shakl: $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, bu yerda:
 - $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – modul (absolyut qiymat, $|z|$),
 - $\theta = \arg(z)$ – argument (burchak), u kompleks tekislikda origin (0) dan z nuqtagacha bo'lgan burchakdir.

Eyler formulasi bu ikkisini yanada qulayroq bog'laydi:

$$z = r e^{i\theta}$$

Bu eksponensial shakl darajaga ko'tarish va logarifm uchun juda muhimdir, chunki eksponenta oddiy ko'paytirish va qo'shish qonunlariga bo'ysunadi.

2. Ildiz chiqarish – ko'p qiymatlilikning birinchi ko'rinishi

Haqiqiy sonlarda manfiy sonlardan juft darajali ildiz chiqmaydi. Murakkab sonlarda esa har doim chiqadi va ular soni darajaga teng bo'ladi.

Masalan, $z^n = w$ tenglamani yechish – w ning n -chi darajali ildizlarini topish demakdir.

Polar shaklda $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ bo'lsa, uning n -chi ildizlari quyidagicha:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right],$$

bu yerda $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Nima uchun $+2k\pi$ qo'shiladi? Chunki $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta$ va $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta$ – trigonometrik funksiyalar 2π periodic. Shuning uchun argumentni 2π ga oshirib, yangi burchak olamiz, lekin son bir xil qoladi.

Natijada:

- Barcha ildizlarning moduli bir xil: $\sqrt[n]{r}$,
- Argumentlari esa $(2\pi/n)$ ga farq qiladi,
- Umumiy n ta turli ildiz mavjud (kompleks tekislikda muntazam n burchakli ko'pburchak shaklida joylashgan).

Misollar:

- (-1) ning kvadrat ildizlari: i va $-i$ (ikkita ildiz).
- 1 ning kub ildizlari: 1 va ikkita murakkab ildiz (birligining kub ildizlari).

Bu ko'p qiymatlilik logarifm va umumiy darajaga ko'tarishda ham paydo bo'ladi.

3. Murakkab sonni darajaga ko'tarish

Agar ko'rsatkich butun son bo'lsa, hamma oddiy:

De Muavr formulasi:

$$[z = r (\cos \theta + i \sin \theta)] \Rightarrow z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Bu juda qulay va aniq yagona natija beradi.

Agar ko'rsatkich haqiqiy yoki murakkab bo'lsa (masalan, z^α yoki z^w), unda eksponensial shakldan foydalanamiz:

$$z^w = e^{(w \cdot \log z)}$$

Bu yerda $\log z$ – murakkab logarifm. Agar $\log z$ ko'p qiymatli bo'lsa, z^w ham ko'p qiymatli bo'ladi.

4. Murakkab logarifm – eng murakkab qismi

Logarifm – eksponentaning teskari funksiyasi. Haqiqiy sonlarda u yagona, murakkab sonlarda esa cheksiz ko'p qiymatga ega.

Murakkab logarifm ta'rifi:

$$\log z = \ln|z| + i (\arg z + 2k\pi), \quad k - \text{butun son } (k \in \mathbb{Z})$$

Izoh:

- $\ln|z|$ – haqiqiy natural logarifm (modulning logarifmi, yagona),
- $i (\arg z + 2k\pi)$ – xayoliy qism, argumentning 2π periodicligi tufayli cheksiz ko'p variant.

Asosiy qiymat (principal value) odatda $k=0$ va $\arg z$ ni $(-\pi, \pi]$ oralig'ida olinadi:

$$\text{Log } z = \ln|z| + i \text{Arg } z \quad (\text{Arg} - \text{asosiy argument})$$

Misollar:

- $\log(-1) = \ln(1) + i(\pi + 2k\pi) = i\pi (1 + 2k) \rightarrow$ asosiy qiymati $i\pi$,
- $\log(i) = \ln(1) + i(\pi/2 + 2k\pi) \rightarrow$ asosiy qiymati $i\pi/2$,
- $\log(1) = 0 + i \cdot 2k\pi \rightarrow$ asosiy qiymati 0 ,
- $\log(-i) = \ln(1) + i(-\pi/2 + 2k\pi) \rightarrow$ asosiy qiymati $-i\pi/2$.

Logarifmning ko'p qiymatliligi tufayli, umumiy darajaga ko'tarish ham ko'p qiymatli bo'ladi:

$$z^w = \exp(w \cdot \log z) = \exp(w (\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)))$$

Bu har xil k uchun turli natijalar berishi mumkin.

5. Bog'lanish: ildiz $\rightarrow$ daraja $\rightarrow$ logarifm

- Ildiz chiqarish – bu xususan $w^{(1/n)}$ shaklidagi darajaga ko'tarish. U ko'p qiymatli bo'lishining sababi argumentga $+2k\pi$ qo'shilishi.

- Umumiy darajaga ko'tarish logarifm orqali aniqlanadi.
- Logarifm o'zi esa argumentning periodicligi tufayli cheksiz ko'p qiymatga ega.

Kompleks analizda bu ko'p qiymatlilikni bartaraf qilish uchun “branch” (shox) va “branch cut” (kesma) tushunchalari kiritiladi. Masalan, asosiy shoxni $(-\pi, \pi]$ oralig'ida tanlab, funksiyani bir qiymatli qilish mumkin.

Murakkab sonlar dunyosida ildiz chiqarish, darajaga ko'tarish va logarifm haqiqiy sonlardagidan tubdan farq qiladi: ular ko'p qiymatli bo'ladi. Bu farq argumentning 2π periodicligidan kelib chiqadi. Polar va eksponensial shakllar bu amallarni ancha

osonlashtiradi, lekin funksiyalarning ko'p qiymatliligini yodda tutish zarur. Aynan shu xususiyatlar murakkab analizni boy va qiziqarli qiladi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, murakkab sonlar uchun logarifm va darajaga ko'tarish tushunchalari real sonlardagidan ancha murakkab tuzilishga ega. Ayniqsa, ko'p qiymatlilik muammosi nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi. Bu holatni e'tiborga olmasdan murakkab logarifm bilan ishlash noto'g'ri xulosalarga olib kelishi mumkin.

Shu bilan birga, asosiy tarmoq tushunchasini joriy etish orqali murakkab logarifmni bir qiymatli funksiya sifatida qarash imkoniyati mavjud. Bu yondashuv amaliy masalalarda, xususan, fizika va muhandislik hisoblarida qulaylik yaratadi. Munozara shuni ko'rsatadiki, murakkab sonlar analizini o'qitishda geometrik yondashuvga alohida e'tibor qaratish zarur.

Xulosa

Xulosa qilib aytganda, murakkab sonlar dunyosida logarifm va darajaga ko'tarish amallari chuqur nazariy asosga ega bo'lib, ular ildiz chiqarish tushunchasi bilan uzviy bog'langan. Tadqiqot davomida murakkab darajali va logarifmik funksiyalarning ko'p qiymatli tabiati asoslab berildi hamda ularning geometrik talqini yoritildi.

Kelgusida ushbu mavzuni o'rganishda Riman sirtlari, analitik davom ettirish va murakkab differensial tenglamalar bilan bog'liq jihatlarni chuqurroq tadqiq etish tavsiya etiladi. Shuningdek, murakkab sonlar uchun logarifm va darajaga ko'tarish amallarini o'qitishda vizual modellar va grafik vositalardan foydalanish ta'lim samaradorligini oshiradi.

Adabiyotlar:

1. Mel'nyk, T. (2023). *Complex Analysis*. Springer Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-39615-1. Springer Nature
2. Magalhães, L. T. (2025). *Complex Analysis and Dynamics in One Variable with Applications*. Springer Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-64999-8. Springer Nature
3. Bourchtein, A., & Bourchtein, L. (2021). *Complex Analysis*. Springer Singapore. DOI: 10.1007/978-981-15-9219-5. Springer Nature
4. Lvovski, S. (2020). *Principles of Complex Analysis*. Springer (Springer Undergraduate Mathematics Series). DOI: 10.1007/978-3-030-43449-1. Springer Nature
5. Asmar, N. H., & Grafakos, L. (2018). *Complex Analysis with Applications*. Springer Cham (Undergraduate Texts in Mathematics). DOI: 10.1007/978-3-319-94036-6. Springer Nature
6. Isaev, A. (2017). *Twenty-One Lectures on Complex Analysis: A First Course*. Springer Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-68170-2. Springer Nature
7. Sato, K. (2015). *Complex Analysis for Practical Engineering*. Springer Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-13063-7. Springer Nature