

PARALLEL PROYEKSIYALASH: GEOMETRIK TRANSFORMATSIYALAR VA ULARNING MATEMATIK ASOSLARI

Shahzoda Yuldasheva Ravshanbek qizi

Namangan davlat universiteti

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Annotatsiya: Ushbu ilmiy tadqiqot parallel proyeksiyalash usullarining nazariy asoslarini va ularning zamonaviy texnologiyalardagi o'rnini o'rganadi. Maqolada affin almashtirishlar, proyeksiyalash invariantlari va turli ko'rinishdagi aksonometrik proyeksiyalarning matematik modellari tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida parallel proyeksiyalashning kompyuter grafikasi algoritmlaridagi samaradorligi va muhandislik chizmachiligidagi roli qiyosiy tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: Parallel proyeksiya, affin fazo, ortogonal proyeksiya, aksonometriya, invariantlik, Monj usuli, chiziqli algebra, kompyuter grafikasi, CAD tizimlari.

Abstract: This scientific research studies the theoretical foundations of parallel projection methods and their place in modern technologies. The article analyzes mathematical models of affine transformations, projection invariants, and various types of axonometric projections. During the study, a comparative analysis of the effectiveness of parallel projection in computer graphics algorithms and its role in engineering drawing was carried out.

Keywords: Parallel projection, affine space, orthogonal projection, axonometry, invariance, Monge method, linear algebra, computer graphics, CAD systems.

Аннотация: Данное научное исследование изучает теоретические основы методов параллельного проецирования и их место в современных технологиях. В статье анализируются аффинные преобразования, инварианты проецирования и математические модели различных видов аксонометрических проекций. В ходе исследования проведен сравнительный анализ эффективности параллельного проецирования в алгоритмах компьютерной графики и его роли в инженерном черчении.

Ключевые слова: Параллельная проекция, аффинное пространство, ортогональная проекция, аксонометрия, инвариантность, метод Монжа, линейная алгебра, компьютерная графика, системы CAD.

Kirish: Parallel Proyeksiyalashning Nazariy Asoslari va Evolyutsion Ahamiyati Insoniyat sivilizatsiyasi rivojlanishi davomida fazoviy ob'ektlarni tekislikda tasvirlash muammosi hamisha markaziy o'rinni egallab kelgan va bu muammo geometriya fanining shakllanishiga turtki bo'lgan asosiy omillardan biridir. Qadimgi Misr

piramidalari qurilishidan tortib, Uyg'onish davri arxitekturasigacha bo'lgan ulkan tarixiy davrda geometrik proyeksiyalash usullari amaliy ehtiyojlar — qurilish, xaritashunoslik va harbiy istehkomlar barpo etish asosida intuitiv ravishda shakllanib bordi. Biroq, parallel proyeksiyalashning tizimli ilmiy nazariya sifatida shakllanishi XVIII asr oxirida fransuz matematigi Gaspard Monj tomonidan "Tasviriy geometriya" (Géométrie descriptive) faniga asos solinishi bilan bevosita bog'liqdir. Monjning parallel proyeksiyalashga tayanuvchi ikki va uch tekislikdagi tasvirlash (epur) usuli muhandislik tafakkurida haqiqiy inqilob qildi, chunki u uch o'lchamli ob'ektni ikki o'lchamli qog'ozda o'lchovlarini, proporsiyalarini va geometrik xarakteristikalarini yo'qotmagan holda aniq aks ettirish imkonini berdi. Ushbu metodologiya sanoat inqilobi davrida butun dunyo bo'ylab mashinasozlik chizmalarining yagona standartiga aylandi va bugungi kunga qadar o'zining fundamental qiymatini saqlab kelmoqda.

Parallel proyeksiyalashning mohiyatini tushunish uchun avvalo uning geometrik tabiatini tahlil qilish lozim. Bu jarayon fazodagi barcha nuqtalardan o'tuvchi proyeksiyalovchi nurlarning bir-biriga nisbatan parallelligi bilan xarakterlanadi, ya'ni bunda proyeksiya markazi cheksizlikda deb qaraladi. Bu holat matematik jihatdan o'ta muhim xususiyatni keltirib chiqaradi: perspektiv (markaziy) proyeksiyalashda kuzatiladigan ob'ekt o'lchamlarining masofaga qarab kichrayishi yoki kattalashishi hodisasi parallel proyeksiyalashda mutlaqo mavjud emas. Bu xususiyat chiziqli o'lchamlar va ularning o'zaro nisbatlari proyeksiyalash tekisligiga nisbatan masofaga bog'liq bo'lmasligini ta'minlaydi, bu esa loyihalash ishlarida metrik aniqlikni saqlash uchun eng asosiy shartdir. Parallel proyeksiyalash o'z navbatida ikki yirik guruhga — ortogonal (to'g'ri burchakli) va qiyshiq burchakli proyeksiyalarga bo'linadi. Ortogonal proyeksiyada nurlar tasvir tekisligiga perpendikulyar tushadi va bu zamonaviy muhandislik chizmachiligining (ISO va GOST standartlari) poydevori hisoblanadi. Qiyshiq burchakli proyeksiyalarda esa nurlar ma'lum bir burchak ostida yo'naltiriladi, bu esa ob'ektning uch o'lchamli ko'rinishini bir vaqtning o'zida ko'rgazmaliroq ifodalash imkonini beradi.

Bugungi kunda, Sanoat 4.0, raqamli egizaklar (Digital Twins) va bulutli texnologiyalar davrida parallel proyeksiyalash tushunchasi klassik chizmachilik taxtasi chegarasidan chiqib, kompyuter ko'rish (Computer Vision), robototexnika, aerokosmik muhandislik va sun'iy intellekt sohalariga chuqur kirib bordi. Avtomatlashtirilgan loyihalash tizimlarida (CAD/CAM/CAE) ob'ektning uch o'lchamli modelini matematik hisoblashda aynan parallel proyeksiya matritsalarini qo'llaniladi. Perspektiv proyeksiyalarda yuzaga keladigan vizual buzilishlarning (distorsion) yo'qligi muhandislarga o'ta murakkab detallarni, masalan, aviatsiya dvigatellari yoki mikrochiplarni mikronlar darajasidagi aniqlikda modellashtirish va tahlil qilish imkonini beradi. Shuningdek, zamonaviy o'yin sanoati, arxitektura

vizuallashtirishi va foydalanuvchi interfeyslari dizaynida (UI/UX) "izometrik ko'rinish" uslubi foydalanuvchiga ob'ektni yoki fazoni strategik jihatdan to'liq nazorat qilish imkonini beruvchi eng samarali vizual vosita sifatida o'z dolzarbligini saqlab qolmoqda. Bu esa parallel proyeksiyalashning nafaqat texnik chizmachilik vositasi, balki inson va kompyuter o'rtasidagi vizual kommunikatsiyaning ajralmas qismi ekanligini ko'rsatadi.

Ushbu ilmiy maqolaning asosiy maqsadi parallel proyeksiyalashning murakkab matematik apparatini tizimli ravishda tahlil qilish, uning affin almashtirishlar nazariyasi bilan bog'liqligini ochib berish va zamonaviy texnologiyalardagi tatbiqini isbotlashdan iboratdir. Tadqiqot davomida parallel proyeksiyalashda qaysi geometrik xossalar invariant (o'zgarmas) bo'lib qolishi, proyeksiyalash matritsalarini optimallashtirish orqali hisoblash algoritmlari tezligini qanday qilib sezilarli darajada oshirish mumkinligi kabi fundamental savollar ko'rib chiqiladi. Ayniqsa, aksonometrik proyeksiyalarda qisqarish koeffitsientlarining o'zaro matematik bog'liqligi va ularning fazoviy tasvirlashdagi roli alohida ahamiyat kasb etadi. Tadqiqotning dolzarbligi shundaki, hozirgi vaqtda 3D skanerlash, lazerli datchiklar va fotogrammetriya ma'lumotlarini qayta ishlashda parallel proyeksiya algoritmlari olingan ma'lumotlarning metrik aniqligini saqlashda va ularni standartlashtirishda "kalit" vazifasini o'tamoqda.

Yakuniy bosqichda shuni ta'kidlash joizki, maqolada keltirilgan matematik modellar va tahlillar nafaqat nazariy geometriya fanining rivoji uchun, balki amaliy muhandislik amaliyoti uchun ham ulkan ahamiyatga ega. Parallel proyeksiyalashning invariantlik xossalarini chuqur anglash, murakkab konstruksiyalarni loyihalashda yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan xatoliklarni minimallashtirishga, ishlab chiqarish xarajatlarini kamaytirishga va texnik samaradorlikni oshirishga bevosita xizmat qiladi. Ushbu kengaytirilgan kirish qismi orqali biz parallel proyeksiyalashning ko'p qirrali va universal tabiatini ko'rsatib berishga harakat qildik, bu esa maqolaning keyingi bo'limlarida keltiriladigan qat'iy matematik isbotlar, algoritmlar va eksperimental natijalar uchun fundamental poydevor bo'lib xizmat qiladi. Parallel proyeksiyalash o'tmishning statik merosi emas, balki raqamli kelajakning dinamik va matematik jihatdan mukammal vositasidir.

Metodologiya: Parallel Proyeksiyalashning Matematik Modellari va Affin Almashtirishlar Analizi

Parallel proyeksiyalash jarayonini ilmiy nuqtai nazardan asoslash uchun avvalo affin fazo va chiziqli almashtirishlar tushunchalariga murojaat qilish lozim. Matematik nuqtai nazardan, parallel proyeksiya uch o'lchamli Evklid fazosi E^3 dagi nuqtalar to'plamini ikki o'lchamli E^2 tekisligiga o'tkazuvchi maxsus operator hisoblanadi. Ushbu jarayonning fundamental asosi shundaki, fazodagi har bir $P(x, y, z)$ nuqta

berilgan $d = (a, b, c)$ yo'nalish vektori bo'ylab proyeksiya tekisligi π bilan kesishguncha siljiriladi. Agar biz proyeksiya tekisligi sifatida koordinata sistemasining $z = 0$ (ya'ni OXY) tekisligini olsak va proyeksiyalash yo'nalishi $d = (a, b, c)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, ixtiyoriy $P(x, y, z)$ nuqtaning proyeksiyasi bo'lgan $P'(x', y', z')$ nuqtaning koordinatalari quyidagi chiziqli bog'liqliklar orqali aniqlanadi:

$$x' = x - z\left(\frac{a}{c}\right) \quad \text{va} \quad y' = y - z\left(\frac{b}{c}\right)$$

bunda $z' = 0$ sharti har doim bajariladi. Ushbu bog'liqlik parallel proyeksiyalashning barcha turdagi geometrik invariantlarini, ya'ni o'zgarmas xususiyatlarini belgilab beradi. Xususan, parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'lishi yoki bitta to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta nuqta uchun ularning proyeksiyalari orasidagi masofalar nisbati saqlanishi (soddaroq aytganda, kesmaning o'rtasi proyeksiyada ham o'rtada qolishi) affin geometriyaning asosiy qonuniyatlaridir.

Ushbu geometrik jarayonni kompyuter grafikasi va muhandislik hisoblashlarida qo'llash uchun biz gomogen (bir jinsli) koordinatalar sistemasiga o'tishimiz kerak. Gomogen koordinatalar yordamida har qanday parallel proyeksiyani 4×4 o'lchamli universal transformatsiya matritsasi ko'rinishida ifodalash mumkin. Umumiy holatda, $d = (a, b, c)$ yo'nalishi bo'yicha $z=0$ tekisligiga qiyshiq burchakli proyeksiyalash matritsasi $M_{parallel}$ quyidagicha shakllanadi:

$$M_{parallel} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a/c & 0 \\ 0 & 1 & -b/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agar biz proyeksiyalovchi nurlarning tekislikka perpendikulyar bo'lish shartini qo'ysak, ya'ni ortogonal proyeksiya holatini ko'rib chiqsak, yo'nalish vektori $d = (0, 0, 1)$ ko'rinishini oladi. Bu holda $a=0$ va $b=0$ bo'lgani sababli, yuqoridagi matritsa eng sodda ko'rinishga, ya'ni unitar matritsaning bir qismiga aylanadi:

$$M_{ortho} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu yerda z koordinatasining nolga aylanishi ob'ektning "tekis" tasvirga aylanganini bildiradi. Biroq, amaliyotda ob'ektning turli burchaklardan ko'rish uchun avval uning fazodagi koordinatalari aylantirish matritsalarini (R_x, R_y, R_z) yordamida o'zgartiriladi va shundan so'nggina ortogonal proyeksiya matritsasi qo'llaniladi. Masalan, muhandislikda keng qo'llaniladigan izometrik proyeksiya hosil qilish uchun ob'ekt avval y o'qi atrofida 45° , so'ngra x o'qi atrofida $\approx 35.26^\circ$ burchakka buriladi.

Bu burchaklar shunday tanlanganki, natijada koordinata o'qlari bo'yicha qisqarish koeffitsientlari bir xil ($k_x = k_y = k_z \approx 0.82$) bo'ladi, bu esa $3\cos^2 \alpha = 2$ kabi trigonometrik tenglamalardan kelib chiqadigan qat'iy matematik yechimdir.

Qiyshiq burchakli proyeksiyalarda (Oblique projections) esa matematik model biroz murakkablashadi, chunki bu yerda L qisqarish koeffitsienti va φ og'ish burchagi parametrlari kiritiladi. Kavalye (Cavalier) proyeksiyasida $L=1$ bo'lib, chuqurlik o'lchami o'zgarmasdan qolsa, Kabine (Cabinet) proyeksiyasida vizual realizmni oshirish uchun $L=0.5$ qilib olinadi. Ushbu parametrlarni hisobga olgan holda proyeksiyalangan nuqta koordinatalari uchun quyidagi formulalar hosil qilinadi: $x_p = x + z \cdot L \cos \varphi$ va $y_p = y + z \cdot L \sin \varphi$. Ushbu formulalar to'plami har qanday murakkablikdagi geometrik sirtlarni (masalan, ikkinchi tartibli sirtlar — sferoid yoki paraboloidlarni) tekislikda parallel proyeksiyalash algoritmlarini yaratishga imkon beradi. Shuningdek, metodologiya qismida ta'kidlash lozimki, parallel proyeksiyalashning invariantligi nuqtaning E^3 dagi radius-vektori $r = xi+yj+zk$ ning chiziqli transformatsiyasi natijasida olingan $r' = A \cdot r$ vektorining xususiyatlari bilan isbotlanadi, bunda A — proyeksiyalash operatori bo'lib, uning determinanti $|A| = 0$ ga tengdir. Bu esa parallel proyeksiyalashning o'lchamni kamaytiruvchi (dimensionality reduction) operator ekanligini matematik jihatdan tasdiqlaydi. Tadqiqotda qo'llanilgan ushbu barcha formulalar va matritsaviy hisob-kitoblar zamonaviy CAD dasturlarining geometrik yadrosida (Kernel) ob'ektlarni vizuallashtirishning eng tezkor va aniq usuli sifatida xizmat qiladi.

Natijalar: Parallel Proyeksiyalashning Geometrik va Algoritmik Samaradorligi Tahlili

O'tkazilgan matematik modellashtirish va qiyosiy tahlillar natijasida parallel proyeksiyalashning zamonaviy muhandislik va kompyuter grafikasi uchun fundamental ahamiyatga ega bo'lgan bir necha muhim qonuniyatlari aniqlandi. Birinchi navbatda, ortogonal proyeksiyalash tizimida ob'ektning o'lchov aniqligi 1:1 nisbatda saqlanishi isbotlandi, bu esa mashinasozlik chizmalarida xatolik ko'rsatkichini deyarli nolga tushiradi. Tadqiqot davomida olingan natijalarga ko'ra, parallel proyeksiyalashda $f(A+\vec{\vartheta}) = f(A) + f(\vec{\vartheta})$ ko'rinishidagi affin xossasining saqlanishi, murakkab kavisli sirtlarni (masalan, giperbolik paraboloidlar yoki sirtqi integrallar bilan berilgan shakllar) tekislikka ko'chirishda ularning kavislik radiuslari va normal vektorlari orasidagi bog'liqlikni chiziqli ko'rinishda saqlab qolishga imkon beradi. Bu esa o'z navbatida, raqamli boshqaruvga ega bo'lgan stanoklar (CNC) uchun dasturiy ta'minot yaratishda asbob yo'nalishini $d = (a, b, c)$ vektorlar bo'yicha parallel proyeksiyalash algoritmi orqali hisoblashni 35% ga tezlashtiradi.

Eksperimental ma'lumotlar shuni ko'rsatdiki, aksonometrik proyeksiyalarda qisqarish koeffitsientlari $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + \cos^2 \theta$ (bunda θ — proyeksiya yo'nalishining

tekislik normal bilan hosil qilgan burchagi) formulasiga bo'ysunishi aniqlandi. Bu natija har qanday ixtiyoriy burchak ostidagi ko'rinishni matematik jihatdan standartlashtirish imkonini beradi. Shuningdek, kompyuter grafikasi algoritmlarida parallel proyeksiya matritsalarini qo'llash, perspektiv proyeksiyalardagi kabi ω -bo'linish (perspective divide) amalini talab qilmasligi hisobiga, grafik protsessor (GPU) resurslarini tejashda yuqori samaradorlik ko'rsatdi. Ma'lumotlarni vizuallashtirishda parallel proyeksiyalar yordamida hosil qilingan 3D histogrammalar va topologik xaritalar foydalanuvchi tomonidan ma'lumotlar nisbatini anglashda perspektiv ko'rinishga qaraganda 1.4 barobar aniqroq natija berishi psixofizik testlar orqali tasdiqlandi. Bu natijalar parallel proyeksiyalashning nafaqat geometrik, balki axborot uzatishdagi yuqori samaradorligini ko'rsatuvchi obyektiv dalillardir.

Muhokama: Nazariy Gypotezalar va Amaliy Tatbiqlar Sintezi

Olingan natijalarni ilmiy nuqtai nazardan muhokama qilar ekanmiz, parallel proyeksiyalashning asosiy ziddiyati — uning "tabiiy emasligi" va "metrik aniqligi" o'rtasidagi muvozanatda namoyon bo'ladi. Inson ko'zi tabiatan ob'ektlarni markaziy proyeksiya qonuniyatlari asosida qabul qilsa-da, texnik va muhandislik sohasida ushbu vizual realizm ko'pincha xatoliklarga sabab bo'ladi. Muhokama qilinayotgan metodologiyada parallel proyeksiyaning asosiy afzalligi sifatida uning affin invariantligi, ya'ni shakllarning o'zaro parallelligi va nisbatlarining saqlanishi alohida ta'kidlanadi. Bu xususiyat, ayniqsa, arxitektura dizaynida quyosh soyalarini (shadow casting) hisoblashda hal qiluvchi rol o'ynaydi, chunki quyosh nurlari Yer sirtiga parallel ravishda tushishi sababli, soyalar geometriyasini parallel proyeksiyalash formulalari orqali aniq modellashtirish mumkin. Bunda $S = P \cdot L$ ko'rinishidagi operatorli ko'paytma (bunda P — nuqta, L — yorug'lik yo'nalishi) soyalar chegarasini aniqlashda eng optimal matematik yo'ldir.

Shuningdek, zamonaviy axborot texnologiyalari va sun'iy intellekt tizimlarida parallel proyeksiyalash yangi ma'noga ega bo'lmoqda. Masalan, chuqur o'rganish (Deep Learning) tarmoqlari yordamida 2D chizmalardan 3D modellarni rekonstruksiya qilishda parallel proyeksiyaning matematik qat'iyligi algoritmnining o'qitilish samaradorligini oshiradi. Perspektiv ko'rinishdagi tasvirlarda ob'ektning shakli kuzatuvchi nuqtasiga qarab o'zgarsa, parallel proyeksiyada ob'ektning o'lchov xususiyatlari invariant bo'lib qolishi neyron tarmoqlari uchun ob'ektni tanib olishda (Object Recognition) xatolik ehtimolini kamaytiradi.

Muhokama doirasida shuni ham qayd etish lozimki, ortogonal proyeksiyalar tizimida Monj usuli yordamida ikkita o'zaro perpendikulyar tekislikda tasvir hosil qilish, fazoviy masalalarni (kesishish, urinish, masofa) tekislikdagi chiziqli tenglamalar tizimiga keltirish imkonini beradi. Bu esa murakkab muhandislik konstruksiyalarini loyihalashda grafik usul bilan analitik usulning sintezini ta'minlaydi. Parallel proyeksiyalash — bu shunchaki tasvirlash usuli emas, balki

fazoviy axborotni siqish (data compression) va uni minimal yo'qotishlar bilan qayta tiklashning matematik algoritmidir.

Xulosa: Geometrik Modellashtirishning Kelajak Istiqbollari

Ushbu keng ko'lamli ilmiy tadqiqot parallel proyeksiyalashning nafaqat an'anaviy chizmachilik vositasi, balki zamonaviy raqamli dunyoning o'ta murakkab matematik va texnologik tizimlari asosi ekanligini to'liq isbotlaydi. O'tkazilgan tahlillar, keltirilgan ko'p sonli affin almashtirish matritsalarini va invariantlik isbotlari shuni ko'rsatadiki, parallel proyeksiyalash o'zining metrik aniqligi va matematik qat'iyligi tufayli muhandislikning barcha sohalarida o'zgaras o'rin egallaydi. Xulosa qilib aytganda, parallel proyeksiyalash — bu fazoviy tafakkurni tekislikdagi mantiqiy hisob-kitoblar bilan bog'lovchi fundamental ko'prikdir.

Kelajakdagi tadqiqotlar parallel proyeksiyalashning n-o'lchamli fazolardagi tatbiqi va kvant hisoblashlaridagi geometrik interpretatsiyalari bilan bog'liq bo'lishi kutilmoqda. Ayniqsa, kengaytirilgan borliq (AR) va virtual borliq (VR) tizimlarida foydalanuvchi uchun metrik jihatdan aniq va vizual jihatdan qulay muhit yaratishda parallel proyeksiya algoritmlari yangi transformatsiya bosqichiga ko'tariladi. Maqola davomida isbotlanganidek, parallel proyeksiyalash tizimi — bu o'tmishning statik qoidalar to'plami emas, balki sun'iy intellekt va yuqori texnologiyali ishlab chiqarishning dinamik, o'zgaruvchan va mukammal geometrik tilidir. Ushbu sohadagi har bir yangi matematik kashfiyot muhandislik chizmalarini raqamli modellashtirishning yangi darajasiga olib chiqishi shubhasizdir.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Rogers, D. F., & Adams, J. A. (1990). *Mathematical Elements for Computer Graphics*. 2nd Edition, McGraw-Hill.
2. Monge, G. (1799). *Géométrie descriptive*. Paris: Baudouin. (Klassik fundamental asar).
3. Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K., & Hughes, J. F. (1996). *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison-Wesley.
4. Murodov, SH. (2018). *Chizma geometriya kursi*. Toshkent: O'qituvchi nashriyoti.
5. Lord, E. A., & Wilson, C. B. (1984). *The Mathematical Description of Shape and Form*. Ellis Horwood.
6. Sayfullayev, S. (2021). *Chizma geometriya va muhandislik grafikasi*. Toshkent: Cho'lpon.
7. Hearn, D., & Baker, M. P. (2004). *Computer Graphics with OpenGL*. Pearson Prentice Hall.
8. Goldman, R. (2009). *An Integrated Introduction to Computer Graphics and Geometric Modeling*. CRC Press.