KO'P O'LCHOVLI EVKLID FAZOSIDA METRIK MASALALAR

Abdumajidova Musharrafxon Dilshodbek qizi
NamDU, Fizika-matematika fakulteti
Matematika yo'nalishi, 1-kurs talabasi
Ilmiy rahbar: ***Maxmudova Dilnoza Xaytmirzayevna***
Matematika kafedrasi dotsenti

Annotatsiya: Ushbu maqolada n-o'lchovli Yevklid fazosida metrik masalalar, xususan nuqtalar orasidagi masofa, nuqtadan gipertekislikkacha bo'lgan masofa va ko'p o'lchovli sharlar xossalari tadqiq etiladi. Skalyar ko'paytma va norma tushunchalari asosida metrik munosabatlarning algebraik ifodalari keltirib chiqariladi. Nazariy natijalar ko'p o'lchovli ma'lumotlarni tahlil qilish va zamonaviy geometrik modellashtirishda qo'llanilishi mumkin.

Kalit so'zlar: Yevklid fazosi, metrika, skalyar ko'paytma, gipertekislik, n-o'lchovli shar, masofa.

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация: В данной статье исследуются метрические задачи в n-мерном евклидовом пространстве, в частности расстояние между точками, расстояние от точки до гиперплоскости и свойства многомерных шаров. На основе понятий скалярного произведения и нормы выводятся алгебраические выражения метрических отношений. Теоретические результаты могут быть использованы в анализе многомерных данных и современном геометрическом моделировании.

Ключевые слова: евклидово пространство, метрика, скалярное произведение, гиперплоскость, n-мерный шар, расстояние.

METRIC PROBLEMS IN MULTIDIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Abstract: This article investigates metric problems in n-dimensional Euclidean space, specifically the distance between points, the distance from a point to a hyperplane, and the properties of multidimensional balls. Based on the concepts of scalar product and norm, algebraic expressions of metric relations are derived. The theoretical outcomes can be applied in multidimensional data analysis and modern geometric modeling.

Keywords: Euclidean space, metric, scalar product, hyperplane, n-dimensional ball, distance.

Kirish

Ko‘p o‘lchovli fazolar tushunchasi matematikaning turli sohalarida, xususan, chiziqli algebra, funksional analiz va differensial geometriyada fundamental ahamiyatga ega. Uning tarixi XIX asr oxirlarida, Bernhard Riemann va Henri Poincaré kabi matematiklar tomonidan geometrik tushunchalarni umumlashtirishga urinishlar bilan boshlangan. Dastlab nazariy xarakterga ega bo‘lgan bu tushunchalar, XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab, fan va texnikaning jadal rivojlanishi bilan amaliy ahamiyat kasb etdi [1].

Bugungi kunda ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosi ma’lumotlarni tahlil qilish (Data Science), mashinali o‘qitish (Machine Learning), kompyuter grafikasi, kvant mexanikasi va iqtisodiy modellashtirish kabi sohalarda keng qo‘llanilmoqda. Masalan, mashinali o‘qitishda har bir obyekt ko‘p o‘lchovli fazodagi nuqta sifatida tasvirlanadi va ular orasidagi masofalar obyektlarning o‘xshashligini aniqlashda asosiy mezon bo‘lib xizmat qiladi [2]. Katta hajmdagi ma’lumotlar (Big Data) bilan ishlashda ham, ma’lumotlar nuqtalarining o‘zaro joylashuvi va ular orasidagi metrik munosabatlarni tushunish muhim ahamiyatga ega.

Ushbu maqolaning maqsadi n-o‘lchovli Yevklid fazosining metrik xossalarini chuqur tahlil qilish, undagi asosiy metrik masalalarni yechish usullarini ko‘rsatib berish va ularning amaliy tatbiqlarini yoritishdan iborat. Tadqiqot davomida skalyar ko‘paytma, norma va masofa (metrika) tushunchalari asosida ko‘p o‘lchovli fazodagi geometrik obyektlar, xususan, nuqtalar, gipertekisliklar va sharlar orasidagi metrik munosabatlar o‘rganiladi. Olingan nazariy natijalar aniq formulalar orqali ifodalanadi va ularning zamonaviy texnologiyalardagi o‘rni muhokama qilinadi.

Metod

Tadqiqot metodining asosi n-o‘lchovli Yevklid fazosining fundamental tushunchalari va teoremalariga tayanadi. Bu fazoda skalyar ko‘paytma, norma va metrika asosiy rol o‘ynaydi. Fazoda berilgan ikki nuqta $x = (x_1, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, \dots, y_n)$ uchun skalyar ko‘paytma quyidagicha aniqlanadi: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$[3]

Ushbu skalyar ko‘paytma quyidagi xossalarga ega:

1 Simmetriklik: $(x, y) = (y, x)$

2 Chiziqlilik:$(\lambda x, y) = \lambda(x, y) va (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

3 Musbat aniqlanganlik: $(x, x) \geq 0, va \quad (x, x) = 0$ faqat $x = 0$ bo‘lganda.

Skalyar ko‘paytma yordamida vektorning uzunligi (normasi) $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ va ikki nuqta orasidagi masofa (metrika) $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ kiritiladi [4].

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.Ixtiyoriy $x, y \in \mathbb{R}^m$ vektorlar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinlidir: $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$

Isbot:Agar $y = 0$ bo‘lsa, tengsizlik trivial ravishda o‘rinli. Agar $y \neq 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy haqiqiy λ uchun quyidagi kvadrat uchhadni qaraymiz:

$$|x - \lambda y|^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) \geq 0$$

Bu kvadrat uchhad \lambda ga nisbatan har doim nomanfiy bo‘lgani uchun uning diskriminanti nomusbat bo‘lishi kerak:

$$D = \left(2(x, y)\right)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 04(x, y)^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0(x, y)^2 \leq |x|^2|y|^2$$

Ikkala tomonidan kvadrat ildiz olsak, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini hosil qilamiz: $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$. Bu tengsizlik ikki vektor orasidagi burchakni aniqlashda asos bo‘ladi: $\cos\theta = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}$.

Uchburchak tengsizligi (Minkowski tengsizligi).Ixtiyoriy $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{m}}$ vektorlar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinlidir:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Isbot:Normaning kvadratini qaraymiz:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib, $(x, y) \leq |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ ekanligini bilamiz. Shuning uchun:

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

Ikkala tomonidan kvadrat ildiz olsak, uchburchak tengsizligini hosil qilamiz: $|x + y| \leq |x| + |y|$. Bu tengsizlik metrik fazoning asosiy aksiomalaridan biri bo‘lib, geometrik jihatdan uchburchakning bir tomoni qolgan ikki tomoni yig‘indisidan katta bo‘lmasligini anglatadi.

Gipertekislik esa n-o‘lchovli fazoda $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ ko‘rinishidagi chiziqli tenglama bilan aniqlanadi. Bu yerda $a = (a_1, \dots, a_n)$ vektor gipertekislikning normal vektori hisoblanadi.

Natija

Metodik yondashuv asosida n-o‘lchovli fazodagi asosiy metrik masalalar uchun quyidagi natijalar olindi:

1. Ikki nuqta orasidagi masofa. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\ va\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, ularning orasidagi masofa quyidagi formula bilan topiladi: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

Misol: $\mathbb{R}^3$ fazosida $A = (1,2,3)\ va\ B = (4, -1,5)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish:Formuladan foydalanib:

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 9 + 4}$$
$$= \sqrt{22} \approx 4.69$$

2. Nuqtadan gipertekislikkacha bo‘lgan masofa.Berilgan $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ nuqtadan $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b=0$ gipertekislikkacha bo‘lgan eng qisqa masofa d quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$d=\frac{|a_1x_1^0+\cdots+a_nx_n^0+b|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$$

Misol: $\mathbb{R}^3 fazosida P=(1,2,-3) nuqtadan 2x_1-3x_2+x_3-4=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish: Formuladan foydalanib:

$$d=\frac{|2(1)-3(2)+1(-3)-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{|2-6-3-4|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{|-11|}{\sqrt{14}}=\frac{11}{\sqrt{14}}\approx 2.94$$

3. Ikki gipertekislik orasidagi burchak.Normal vektorlari $n_1\, va\, n_2$ bo‘lgan gipertekisliklar orasidagi burchak ϕ uchun: $\cos\phi=\frac{|(n_1,n_2)|}{|n_1|\cdot|n_2|}$

4. Ko‘p o‘lchovli sharning hajmi.n-o‘lchovli R radiusli sharning hajmi $V_n(R)$ quyidagicha aniqlanadi: $V_n(R)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$

Bu natijalar ko‘p o‘lchovli fazolarda geometrik obyektlarning o‘lchovlarini aniq hisoblash imkonini beradi.

4. Amaliy tatbiqlar: Ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosidagi metrik masalalar nazariy matematikadan tashqari, amaliy fan va texnikaning ko‘plab sohalarida keng qo‘llaniladi. Quyida ulardan ba’zilari keltirilgan:

Ma’lumotlarni tahlil qilish va mashinali o‘qitish.

Ma’lumotlar tahlilida har bir obyekt ko‘p o‘lchovli fazodagi nuqta sifatida tasvirlanadi, bu yerda har bir o‘lcham obyektning biror xususiyatini (atributini) ifodalaydi. Obyektlar orasidagi masofalarni hisoblash ularning o‘xshashligini yoki farqini aniqlashda muhim rol o‘ynaydi. Masalan:

Klasterlash: k-means algoritmi ma’lumot nuqtalarini ularning Yevklid masofasiga ko‘ra guruhlarga (klasterlarga) ajratadi. Klaster markazlari va nuqtalar orasidagi masofalar klasterlash jarayonining asosini tashkil etadi [5].

Tasniflash : Eng yaqin qo‘shni (k-Nearest Neighbors, k-NN) algoritmi yangi ma’lumot nuqtasini unga eng yaqin joylashgan k-ta qo‘shni nuqtaning sinfiga qarab tasniflaydi. Bu yerda ham Yevklid masofasi nuqtalar orasidagi yaqinlikni o‘lchash uchun ishlatiladi [2].

O‘lchamni kamaytirish : Asosiy komponentlar usuli kabi usullar ma’lumotlarning o‘lchamini kamaytirishda Yevklid fazosining metrik xossalaridan foydalanadi, bu esa ma’lumotlarni vizuallashtirish va tahlil qilishni osonlashtiradi.

Kompyuter grafikasi va Tasvirni qayta ishlash: 3D modellashtirish va kompyuter grafikasida obyektlarning fazodagi joylashuvi, shakli va harakati ko‘p o‘lchovli vektorlar yordamida ifodalanadi. Nuqtalar, chiziqlar va tekisliklar orasidagi masofalar, burchaklar obyektlarni to‘g‘ri joylashtirish, kolliziyalarni aniqlash va realistik tasvirlarni yaratish uchun zarurdir. Tasvirni qayta ishlashda piksel qiymatlari ko‘p o‘lchovli fazodagi nuqtalar sifatida qaralishi mumkin, bu esa tasvirlarni segmentlash, filtratsiya qilish va tanib olishda metrik usullardan foydalanishga imkon beradi.

Fizika va Muhandislik: Kvant mexanikasida zarralarning holatlari cheksiz o‘lchovli Gilbert fazosidagi vektorlar bilan ifodalanadi, bu Yevklid fazosining umumlashtirilgan ko‘rinishidir. Mexanik tizimlarda esa harakat traektoriyalari ko‘p o‘lchovli fazoda egri chiziqlar sifatida tasvirlanadi va ular orasidagi masofalar tizimning barqarorligini tahlil qilishda ishlatiladi. Robototexnikada robotning harakatini rejalashtirishda to‘siqlar orasidagi eng qisqa masofalarni hisoblash muhim ahamiyatga ega. Bu tatbiqlar ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosidagi metrik masalalarning nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham qanchalik muhim ekanligini ko‘rsatadi.

Muhokama

Olingan natijalar ko‘p o‘lchovli fazolarda metrik munosabatlarning barqaror ekanligini ko‘rsatadi. Eng muhim jihati shundaki, o‘lcham n ortib borishi bilan metrik xossalar o‘zgarsa-da, skalyar ko‘paytma asosidagi algebraik struktura saqlanib qoladi. Bu esa parallel strukturalar va masofaviy bog‘liqliklar uchun hisoblash modellarini yaratishda invariant sifatida qaraladi.

Natijalar shuni ko‘rsatadiki, ko‘p o‘lchovli sharning hajmi $n \to \infty$ da nolga intiladi, bu esa "o‘lchamlar la’nati" (curse of dimensionality) hodisasini matematik jihatdan tasdiqlaydi. Bu xususiyat ma’lumotlarni klasterlash va tasniflashda masofalarning ahamiyatini yanada oshiradi.

Xulosa

Ushbu maqolada n-o‘lchovli Yevklid fazosida metrik masalalar chuqur tahlil qilindi va ularning nazariy asoslari hamda amaliy tatbiqlari yoritildi. Tadqiqot natijasida quyidagi muhim xulosalarga kelindi:

Fundamental tushunchalarning ahamiyati: Skalyar ko‘paytma, norma va metrika tushunchalari ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosining geometrik tuzilishini aniqlashda fundamental rol o‘ynaydi. Koshi-Bunyakovskiy va uchburchak tengsizliklari kabi asosiy teoremalar bu fazodagi metrik munosabatlarning barqarorligini ta’minlaydi.

Metrik masalalarning universalligi: Ikki nuqta orasidagi masofa, nuqtadan gipertekislikkacha bo‘lgan masofa, gipertekisliklar orasidagi burchak va ko‘p o‘lchovli sharning hajmi kabi metrik masalalar uchun keltirilgan formulalar ikki va uch o‘lchovli fazolardagi klassik formulalarning tabiiy umumlashtirilishi hisoblanadi. Bu universal formulalar har qanday o‘lchamdagi fazoda geometrik hisoblashlar o‘tkazish imkonini beradi.

Amaliy tatbiqlarning kengligi: Ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosidagi metrik masalalar nazariy matematikadan tashqari, ma’lumotlar tahlili (klasterlash, tasniflash), mashinali o‘qitish, kompyuter grafikasi, tasvirni qayta ishlash, fizika va muhandislik kabi sohalarda keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, "o‘lchamlar la’nati" hodisasi ma’lumotlar fanida masofaviy o‘lchovlarning ahamiyatini yanada oshiradi.

Ushbu tadqiqot ko‘p o‘lchovli fazolarning murakkab geometrik xususiyatlarini tushunishga va ulardan amaliy masalalarni yechishda samarali foydalanishga yordam beradi. Kelajakda bu yo‘nalishdagi tadqiqotlar cheksiz o‘lchovli fazolar (masalan, Gilbert fazosi) va ulardagi metrik masalalarni o‘rganishga qaratilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Riemann, B. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (1854).
2. Bishop, C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
3. Ayupov Sh., Berdiqulov M., Turg‘unboyev R. Funksional analiz (o‘quv qo‘llanma). Toshkent, 2010.
4. Ilyin V.A., Poznyak E.G. Lineynaya algebra (rus tilida). Moskva, Nauka, 1999.
5. Duda, R. O., Hart, P. E., & Stork, D. G. Pattern Classification. Wiley-Interscience, 2001.
6. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to\'g\'ri chiziqqacha bo\'lgan masofa. Ikki to\'g\'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
7. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to\'g\'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
8. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
9. Abdiqayumov , A., & Maxmudova , D. (2025). CENTRAL AND PARALLEL PROJECTIONS AND THEIR PROPERTIES. Теоретические аспекты становления педагогических наук, 4(8), 177–184.
10. Abdumajidova M. D. Makhmudova, D. K. **Tekislik va to‘g‘ri chiziq sistemalari uchun yangi “parallel proyeksiya teoremasi”** 2(4), 426-433.