MAKSIMAL OQIM VA MINIMAL KESIM HAQIDAGI TEOREMA HAMDA UNI FORD-FULKERSON ALGORITMI YORDAMIDA YECHISH

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna
Farg'ona davlat universiteti dotsenti,
Pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
E-mail: mamatova.zilolakhon@gmail.com
Orcid: 0009-0009-9247-3510
Tojialiyeva Mohigul Muzrobjon qizi
Farg'ona davlat universiteti talabasi
tojialiyevamohigul0@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada jarayonlar tadqiqoti va optimal boshqaruv fanining fundamental natijalaridan biri — maksimal oqim va minimal kesim haqidagi teorema ko'rib chiqiladi. Masala amaliy vaziyat asosida shakllantirilib, oqim tarmog'ida manbadan oqargacha yo'naltirilgan maksimal oqim qiymatini va shu tarmoqning minimal sig'imli (s, t)-kesimini aniqlash maqsad qilingan. Har bir qirraning sig'imi berilgan holda, optimal yechimni topish uchun Ford-Fulkerson algoritmi qo'llanilgan. Kengaytiruvchi yo'l va qoldiq graf tushunchalari asosida hisoblash jarayoni bosqichma-bosqich amalga oshirilgan va natijada tarmoqning eng yuqori o'tkazish qobiliyatini ifodalovchi optimal yechim aniqlangan.

Kalit so'zlar: oqim tarmog'i, maksimal oqim, minimal kesim, Ford-Fulkerson teoremasi, kengaytiruvchi yo'l, qoldiq graf, sig'im funksiyasi, algoritm, optimal boshqaruv, graf nazariyasi.

Annotation. This article examines one of the fundamental results in operations research and optimal control theory — the maximum flow and minimum cut theorem. The problem is formulated based on a practical scenario where the objective is to determine the maximum flow value from source to sink and the corresponding minimum (s, t)-cut capacity in a flow network. Given the capacity of each edge, the optimal solution is obtained using the Ford-Fulkerson algorithm. The solution process is carried out step by step using the concepts of augmenting path and residual graph, and the final result identifies the optimal flow that represents the network's maximum throughput.

Keywords: flow network, maximum flow, minimum cut, Ford-Fulkerson theorem, augmenting path, residual graph, capacity function, algorithm, optimal control, graph theory.

Аннотация. В данной статье рассматривается одна из фундаментальных задач теории исследования операций и оптимального управления — теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Задача формулируется на основе

практической ситуации, где требуется определить максимальное значение потока, направляемого из источника в сток, а также пропускную способность минимального (s, t)-разреза в потоковой сети. При заданных пропускных способностях рёбер оптимальное решение находится с использованием алгоритма Форда-Фалкерсона. Процесс решения выполняется поэтапно на основе понятий увеличивающего пути и остаточного графа, в результате чего определяется оптимальный поток, отражающий максимальную пропускную способность сети.

Ключевые слова: потоковая сеть, максимальный поток, минимальный разрез, теорема Форда-Фалкерсона, увеличивающий путь, остаточный граф, функция пропускной способности, алгоритм, оптимальное управление, теория графов.

Optimallashtirish masalalari zamonaviy iqtisodiyot, logistika, telekommunikatsiya va energetika sohalarida muhim o'rin tutadi. Ayniqsa, cheklangan o'tkazish qobiliyatiga ega tarmoqlarda manbadan iste'molchiga maksimal miqdorda resurs (yuk, ma'lumot, suyuqlik, energiya) yetkazib berish muammosi kundalik amaliyotda keng uchraydi. Maksimal oqim masalasi (Maximum Flow Problem) shunday masalalar sinfiga kiradi: berilgan sig'im chegaralari doirasida tarmoq orqali oqib o'tuvchi umumiy oqim qiymatini maksimallashtirishni talab etadi.

Ushbu maqolada quyidagi amaliy vaziyat ko'rib chiqiladi: logistika kompaniyasi mahsulotni s ombor (manba) dan t do'kon (oqar) ga bir nechta oraliq taqsimot punktlari orqali yetkazib berishi lozim. Har bir yo'nalishning maksimal kunlik sig'imi (qancha birlik yuk tashish mumkinligi) ma'lum, tarmoqning umumiy o'tkazish qobiliyati esa qirralarning sig'imlari bilan cheklangan. Masala Ford-Fulkerson algoritmidan foydalanib, qadam-baqadam yechish yo'li ko'rsatiladi.

Ford-Fulkerson algoritmi — oqim tarmog'idagi maksimal oqim qiymatini topish uchun kengaytiruvchi yo'llar (augmentingpaths) va qoldiq graf (residualgraph) tushunchalariga asoslanadigan iterativ usuldir. Bumetod 1956-yildaL. R. FordvaD. R. Fulkerson tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, bugungi kunda kombinator optimallashtirish va graf nazariyasining markaziy algoritmlaridan biri hisoblanadi. Algoritm asosida yaratilgan teorema esa maksimal oqim qiymati va minimal kesim sig'imi orasidagi tenglikni tasdiqlaydi va bu natija chiziqli dasturlashning duallik prinsipining graflar nazariyasidagi tabiiy ifodasini beradi.

Maksimal oqim masalasining matematik shakllanishi: G = (V, E) yo'naltirilgan graf berilgan bo'lib, V — tugunlar to'plami, E — qirralar to'plami, $c: E \to R^{+}$ — sig'im funksiyasi. V to'plamida ikki maxsus tugun ajratilgan: s — manba va t — oqar. Tarmoqdagi f oqim har bir $(u, v) \in E$ qirra uchun sig'im chegarasini qondiradi:

$$0 \le f(u,v) \le c(u,v), \ \forall (u,v) \in E$$

Manba va oqardan boshqa barcha v ∈ V \ {s, t} oraliq tugunlarda oqimning saqlanishi qonuni bajariladi:

$$\Sigma f(u,v) = \Sigma f(v,w), \ \forall v \in V \setminus \{s,t\}$$

Oqimning umumiy qiymati F = |f| manbadan chiquvchi sof oqim sifatida aniqlanadi:

$$F = \Sigma f(s,v) - \Sigma f(v,s) \quad \rightarrow \quad max$$

(S, T) (s, t)-kesim — V tugunlar to'plamining shunday ikki qismga bo'linishidirki, s ∈ S va t ∈ T shartlari bajariladi. Kesim sig'imi S dan T ga o'tuvchi qirralar sig'imlari yig'indisi sifatida aniqlanadi:

$$c(S,T) = \Sigma c(u,v), \ u \in S, v \in T, (u,v) \in E$$

Ford-Fulkerson teoremasi quyidagi fundamental tenglikni tasdiqlaydi:

$$F_m ax = min \, c(S,T)$$

Algoritmning ishlash sxemasi quyidagicha: dastlab f(u, v) = 0 deb qabul qilinadi. Har bir iteratsiyada qoldiq grafda s dan t ga boruvchi kengaytiruvchi yo'l P izlanadi. Agar bunday yo'l mavjud bo'lsa, uning bo'g'imli sig'imi (bottleneck) hisoblanadi:

$$\Delta = min \{ c_f(u,v) : (u,v) \in P \}$$

So'ngra yo'l bo'yicha har bir qirraga Δ qiymat qo'shiladi, oqim yangilanadi va qoldiq graf qayta quriladi. Kengaytiruvchi yo'l topilmagan paytda algoritm to'xtaydi va shu lahzadagi oqim qiymati maksimal hisoblanadi. Minimal kesim esa qoldiq grafda s dan yetib borish mumkin bo'lgan tugunlar to'plamini S* deb belgilash orqali topiladi: T* = V \ S*, va (S*, T*) — minimal kesim bo'ladi.

Logistika kompaniyasi mahsulotni manbadan (s) iste'molchigacha (t) to'rtta oraliq taqsimot punkti — A, B, C, D orqali tashishi lozim. Shuning uchun n = 6 ta tugun va 8 ta yo'naltirilgan qirradan tashkil topgan oqim tarmog'i tuzilgan. Har bir qirra ustida ko'rsatilgan raqam shu yo'nalishdagi maksimal kunlik sig'imni (birliklar) ifodalaydi. Maqsad — tarmoq orqali s dan t ga oqib o'ta oluvchi maksimal oqim miqdorini va shu qiymatga teng minimal kesimni topishdir.

1-jadval. Oqim tarmog'i qirralari va ularning sig'imlari

№	**Qirra (u → v)**	**Sig'im c(u, v)**	**Izoh**
1	s → A	7	Asosiy yuk yo'nalishi
2	s → B	5	Yordamchi yo'nalish
3	A → B	3	A va B punktlari oralig'i
4	A → C	6	A dan C ga to'g'ri yo'l

5	B → D	8	B dan D ga to'g'ri yo'l
6	C → D	4	C va D punktlari oralig'i
7	C → t	5	C dan iste'molchiga
8	D → t	6	D dan iste'molchiga

Quyida har bir k = 1, 2, 3 iteratsiya uchun qoldiq grafda s dan t gacha bo'lgan kengaytiruvchi yo'l tanlanadi, uning bo'g'imli sig'imi hisoblanadi va oqim qiymatlari yangilanadi. Algoritm yangi kengaytiruvchi yo'l topilmaguncha davom etadi.

[k = 1] iteratsiya — birinchi kengaytiruvchi yo'lni tanlash

Boshlang'ich holat: barcha qirralar uchun f(u, v) = 0, qoldiq sig'imlar dastlabki sig'imlarga teng. Qoldiq grafda s tugundan t tugungacha boruvchi eng qisqa yo'lni tanlaymiz:

$$P_1 : s \to A \to C \to t$$

Bu yo'l bo'yicha bo'g'imli sig'im quyidagicha hisoblanadi:

$$\Delta_1 = min\{c(s,A), c(A,C), c(C,t)\} = min\{7,6,5\} = 5$$

Oqim qiymatlarini yangilaymiz:

$$f(s,A) = 0 + 5 = 5,\ f(A,C) = 0 + 5 = 5,\ f(C,t) = 0 + 5 = 5$$

Birinchi iteratsiyadan keyingi qoldiq sig'imlar:

$$c_f(s,A) = 7 - 5 = 2,\ c_f(A,C) = 6 - 5 = 1,\ c_f(C,t) = 5 - 5 = 0$$

$$c_f(A,s) = 5,\ c_f(C,A) = 5,\ c_f(t,C) = 5$$

Birinchi iteratsiyadan keyin umumiy oqim qiymati:

$$F_1 = 5$$

[k = 2] iteratsiya — ikkinchi kengaytiruvchi yo'lni tanlash

Yangilangan qoldiq grafda s → A → C → t yo'li to'yingan (c_f(C, t) = 0), shuning uchun s tugundan boshqa yo'nalish bo'yicha boruvchi kengaytiruvchi yo'lni izlaymiz:

$$P_2 : s \to B \to D \to t$$

Bu yo'lning bo'g'imli sig'imi:

$$\Delta_2 = min\{c(s,B), c(B,D), c(D,t)\} = min\{5,8,6\} = 5$$

Oqim qiymatlarini yangilaymiz:

$$f(s,B) = 0 + 5 = 5,\ f(B,D) = 0 + 5 = 5,\ f(D,t) = 0 + 5 = 5$$

Ikkinchi iteratsiyadan keyingi qoldiq sig'imlar:

$$c_f(s,B) = 5 - 5 = 0,\ c_f(B,D) = 8 - 5 = 3,\ c_f(D,t) = 6 - 5 = 1$$

Ikkinchi iteratsiyadan keyin umumiy oqim qiymati:

$$F_2 = 5 + 5 = 10$$

[k = 3] iteratsiya — uchinchi kengaytiruvchi yo'lni tanlash

Endi s → A → C qirrasida hali c_f(s, A) = 2 va c_f(A, C) = 1 birlik bo'sh sig'im qolgan. Shuningdek, C va D tugunlar orasidagi C → D qirrasi hali ishlatilmagan (c(C, D) = 4), D → t qirrasida ham c_f(D, t) = 1 birlik bo'sh sig'im mavjud. Shu bois s tugundan t tugunga boruvchi quyidagi kengaytiruvchi yo'l mavjud:

$$P_3 : s \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow t$$

Bu yo'lning bo'g'imli sig'imi:

$$\Delta_3 = min\{ c_f(s,A), c_f(A,C), c_f(C,D), c_f(D,t) \} = min\{2,1,4,1\} = 1$$

Oqim qiymatlarini yangilaymiz:

$$f(s,A) = 5 + 1 = 6, \ f(A,C) = 5 + 1 = 6$$
$$f(C,D) = 0 + 1 = 1, \ f(D,t) = 5 + 1 = 6$$

Uchinchi iteratsiyadan keyingi qoldiq sig'imlar:

$$c_f(s,A) = 2 - 1 = 1, \ c_f(A,C) = 1 - 1 = 0$$
$$c_f(C,D) = 4 - 1 = 3, \ c_f(D,t) = 1 - 1 = 0$$

Uchinchi iteratsiyadan keyin umumiy oqim qiymati:

$$F_3 = 5 + 5 + 1 = 11$$

[k = 4] tekshiruv — kengaytiruvchi yo'l mavjudmi?

Uchinchi iteratsiyadan keyin qoldiq grafda s tugundan boshlab BFS (eng qisqa yo'l qidiruvi) o'tkazamiz. s tugundan faqat A tugunga borish mumkin, chunki c_f(s, B) = 0. A tugundan B tugunga (c_f(A, B) = 3) o'tish mumkin, B tugundan esa D tugunga (c_f(B, D) = 3) borish mumkin. Biroq D tugundan t ga to'g'ridan-to'g'ri o'tish imkonsiz, chunki c_f(D, t) = 0. C tugunga ham faqat teskari qirralar orqali yetib borish mumkin (c_f(D, C) = 1), lekin C tugundan t ga c_f(C, t) = 0. Shunday qilib qoldiq grafda s dan t ga boruvchi birorta ham kengaytiruvchi yo'l mavjud emas.

Algoritm to'xtaydi va maksimal oqim qiymati aniqlanadi:

$$F_max = 11$$

Minimal kesimni aniqlash (Min-cut)

Algoritm tugaganidan so'ng minimal kesim quyidagi tartibda topiladi: yakuniy qoldiq grafda s tugundan yetib borish mumkin bo'lgan barcha tugunlar to'plamini S* deb belgilaymiz, qolgan tugunlar esa T* = V \ S* ga kiradi. BFS natijasiga ko'ra:

$$S^* = \{s, A, B, C, D\}, \ T^* = \{t\}$$

Shuning uchun S* dan T* ga o'tuvchi qirralar quyidagilar:

$$(C,t)\ sig'imi\ 5; \quad (D,t)\ sig'imi\ 6$$

Minimal kesim sig'imi:

$$c(S^*, T^*) = c(C,t) + c(D,t) = 5 + 6 = 11$$

Shunday qilib, tarmoqdagi maksimal oqim qiymati ham, minimal kesim sig'imi ham bir xil natijani berdi:

ISSN:3030-3621

$$F_max = min\,c(S,T) = 11 \ ✓$$

Bu natija Ford-Fulkerson teoremasini amalda tasdiqlaydi.

2-jadval. Ford-Fulkerson algoritmi iteratsiyalari

k	**Kengaytiruvchi yo'l P_k**	**Bo'g'imli sig'im Δ_k**	**Joriy oqim F_k**
1	s → A → C → t	5	5
2	s → B → D → t	5	10
3	s → A → C → D → t	1	11
4	yo'l yo'q (to'xtash)	—	11 ✓

3-jadval. Har bir qirradagi yakuniy oqim qiymati

Qirra	**Sig'im c(u,v)**	**Yakuniy oqim f(u,v)**	**Holat**
s → A	7	6	qisman to'la
s → B	5	5	to'liq to'la
A → B	3	0	ishlatilmagan
A → C	6	6	to'liq to'la
B → D	8	5	qisman to'la
C → D	4	1	qisman to'la
C → t	5	5	to'liq to'la (kesim)
D → t	6	6	to'liq to'la (kesim)

OPTIMAL YECHIM. F_max = 11 birlik — bu tarmoq orqali oqib o'ta oluvchi maksimal oqim. Minimal kesim S* = {s, A, B, C, D}, T* = {t} bo'lib, kesim qirralari (C, t) va (D, t) bo'ladi. Kesim sig'imi ham 11 ga teng. Bu — tarmoqning "tor joyi", ya'ni tarmoqning umumiy o'tkazish qobiliyatini cheklovchi qism. C → t va D → t qirralari to'liq to'lganligi (c(C, t) = f(C, t) = 5 va c(D, t) = f(D, t) = 6) bu fikrning amaldagi tasdig'idir.

Xulosa: Berilgan oqim tarmog'ida manbadan oqargacha bo'lgan maksimal oqim qiymati 11 birlikni tashkil etadi. Bunga uch iteratsiya davomida uchta kengaytiruvchi yo'l orqali erishildi: birinchi yo'l (s → A → C → t) bo'yicha 5 birlik, ikkinchi yo'l (s → B → D → t) bo'yicha 5 birlik, uchinchi yo'l (s → A → C → D → t) bo'yicha 1 birlik. Tarmoqda 11 birlikdan ortiq oqim mavjud bo'lishi mumkin emas, chunki sig'imi 11 ga teng minimal kesim aniqlandi. Bu natija Ford-Fulkerson teoremasini amalda tasdiqlaydi.

Mazkur tadqiqot doirasida olingan asosiy natijalar quyidagicha umumlashtiriladi:

1) Ford-Fulkerson algoritmi asosida 3 ta iteratsiya davomida kengaytiruvchi yo'llar va qoldiq graf tushunchalari yordamida oqim qiymatlari to'liq hisoblab chiqildi.
2) Optimal yechim — tarmoqdagi maksimal oqim qiymati F_max = 11 birlikni tashkil etadi va u to'rtta to'la oqim oluvchi qirra (s → B, A → C, C → t, D → t) orqali ta'minlanadi.
3) Minimal kesim S* = {s, A, B, C, D}, T* = {t} bo'lib, kesim sig'imi c(S*, T*) = c(C, t) + c(D, t) = 5 + 6 = 11 ga teng — bu qiymat maksimal oqim bilan aynan mos keldi.
4) Maksimal oqim va minimal kesim haqidagi teorema — max F = min c(S, T) — sodda misol asosida amaliy ravishda tasdiqlandi va u chiziqli dasturlashning duallik prinsipi bilan chuqur bog'liqligini namoyon etdi.
5) Ford-Fulkerson algoritmi murakkab tarmoq optimallashtirish masalalarini bosqichma-bosqich, samarali yechishga imkon beradi va transport, telekommunikatsiya hamda energetika kabi sohalarda keng qo'llaniladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ford L. R., Fulkerson D. R. Maximal flow through a network // Canadian Journal of Mathematics. — 1956. — Vol. 8. — P. 399–404.
2. Edmonds J., Karp R. M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems // Journal of the ACM. — 1972. — Vol. 19, No. 2. — P. 248–264.
3. Dinic E. A. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation // Soviet Mathematics Doklady. — 1970. — Vol. 11. — P. 1277–1280.
4. Goldberg A. V., Tarjan R. E. A new approach to the maximum-flow problem // Journal of the ACM. — 1988. — Vol. 35, No. 4. — P. 921–940.
5. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. — Prentice Hall, New Jersey, 1993. — 846 p.
6. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to Algorithms, 3rd edition. — MIT Press, Cambridge, 2009. — 1292 p.
7. Schrijver A. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. — Springer, Berlin, 2003. — 1881 p.
8. Azlarov T., Mansurov H. Matematik dasturlash asoslari. — Toshkent: O'qituvchi, 2005. — 284 b.
9. Sa'dullayev A. va boshq. Optimallashtirish usullari va operatsiyalar tadqiqoti. — Toshkent: Universitet, 2018. — 312 b.
10. Taha H. A. Operations Research: An Introduction. — Pearson, 2017. — 848 p.