

**MARKOV O'YINLARI VA ULARNI BELLMAN-SHAPLEY TENGLAMASI
YORDAMIDA YECHISH**

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna

*Farg'ona davlat universiteti dotsenti,
pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)*

E-mail: mamatova.zilolakhon@gmail.com

Orcid: 0009-0009-9247-3510

Abduraxmonova Nozanin Robiljon qizi

*Farg'ona davlat universiteti
Amaliy matematika yo'nalishi 23.07-guruh talabasi*

E-mail: abduraxmonovanozanin91@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada jarayonlar tadqiqoti va optimal boshqaruvning muhim yo'nalishlaridan biri — Markov o'yinlari (stoxastik o'yinlar) tahlil qilinadi. Maqolada Lloyd Shapley tomonidan 1953-yilda kiritilgan Markov o'yinining matematik shakllanishi, asosiy turlari (nol yig'indili, umumiy yig'indili, kooperativ va kooperatsiz, chekli va cheksiz gorizontli, diskontlangan va o'rtacha mukofotli) hamda yechim kontseptsiyalari ko'rib chiqiladi. Nazariy tahlil natijalari amaliy holat asosida — ikki firma o'rtasidagi reklama strategiyasi raqobati misolida — Bellman-Shapley rekurrent tenglamasi yordamida qadam-baqadam yechiladi. Qiymat iteratsiyasi algoritmi orqali har bir holat uchun optimal qiymat funksiyasi va muvozanat siyosati topiladi.

Kalit so'zlar: Markov o'yinlari, stoxastik o'yin, Shapley teoremasi, Bellman-Shapley tenglamasi, Nash muvozanati, qiymat funksiyasi, qiymat iteratsiyasi, diskontlangan mukofot, optimal siyosat, minimaks qiymat.

Annotation. This article analyzes Markov games (stochastic games), one of the important areas of operations research and optimal control. The paper examines the mathematical formulation of Markov games introduced by Lloyd Shapley in 1953, their main types (zero-sum, general-sum, cooperative and non-cooperative, finite and infinite horizon, discounted and average-reward), and solution concepts. The theoretical analysis is illustrated by a practical case — a competition between two firms over advertising strategies — which is solved step by step using the Bellman-Shapley recurrent equation. The optimal value function and equilibrium policy for each state are obtained through the value iteration algorithm.

Keywords: Markov games, stochastic game, Shapley theorem, Bellman-Shapley equation, Nash equilibrium, value function, value iteration, discounted reward, optimal policy, minimax value.

Аннотация. В данной статье анализируются марковские игры (стохастические игры) — одно из важных направлений теории исследования операций и оптимального управления. Рассматривается математическая постановка марковской игры, введённой Ллойдом Шепли в 1953 году, её основные типы (с нулевой суммой, с общей суммой, кооперативные и некооперативные, с конечным и бесконечным горизонтом, дисконтированные и со средней наградой), а также концепции решения. Теоретический анализ иллюстрируется практическим случаем — конкуренцией двух фирм по рекламным стратегиям — который решается пошагово с применением рекуррентного уравнения Беллмана-Шепли. С помощью алгоритма итерации по значениям находится оптимальная функция значения и равновесная стратегия для каждого состояния.

Ключевые слова: марковские игры, стохастическая игра, теорема Шепли, уравнение Беллмана-Шепли, равновесие Нэша, функция значения, итерация по значениям, дисконтированная награда, оптимальная стратегия, минимаксное значение.

Zamonaviy iqtisodiyot, sun'iy intellekt, kiberxavfsizlik va robototexnika sohalarida bir nechta qaror qabul qiluvchi tomonlar (o'yinchilar) o'zaro ta'sir qiladigan dinamik tizimlarni modellashtirish dolzarb vazifaga aylangan. Bunday tizimlarda har bir o'yinchining qaroriga nafaqat o'zining joriy foydasi, balki boshqa o'yinchilarning xatti-harakatlari va kelajakdagi muhit holatining stoxastik o'zgarishi ham bog'liq bo'ladi. Bu tipdagi masalalarni matematik jihatdan rasmiylashtirish uchun eng samarali vositalardan biri — Markov o'yinlari (stoxastik o'yinlar) nazariyasidir.

Markov o'yinlari tushunchasini 1953-yilda amerikalik mashhur matematik Lloyd Shapley kiritgan bo'lib, u nol yig'indili ikki o'yinchili stoxastik o'yinlar uchun qiymat funksiyasining mavjudligini isbotladi va Bellman tenglamasining o'yinlar nazariyasi bilan tabiiy birlashishini ko'rsatdi. Keyinchalik bu nazariya ko'p o'yinchili va umumiy yig'indili holatlarga kengaytirildi va bugungi kunda ko'p agentli mustahkamlagichli o'rganish (multi-agent reinforcement learning), iqtisodiy raqobat modellari va kiberhujum-himoya tahlili kabi sohalarining matematik asosini tashkil etmoqda.

Ushbu maqolada quyidagi amaliy vaziyat ko'rib chiqiladi: ikki raqobatdosh firma — 1-firma (foйда olishni maksimallashtiruvchi tomon) va 2-firma (1-firmaning bozor ulushini cheklovchi raqib) — har bir vaqt qadamida bir vaqtning o'zida reklama strategiyalarini tanlaydilar. Bozor holati esa ikki vaziyatdan birida bo'lishi mumkin: yuqori talab yoki past talab. Joriy holat va o'yinchilarning qo'shma harakatlari keyingi davrdagi bozor holatini stoxastik ravishda belgilaydi. Maqsad — 1-firmaning uzoq muddatli diskontlangan kutiladigan foydasini maksimallashtiruvchi optimal siyosatni

va o'yinning qiymat funksiyasini topishdir. Masalani yechish uchun Bellman-Shapley rekurrent tenglamasiga asoslangan qiymat iteratsiyasi algoritmidan foydalaniladi.

Markov o'yinining matematik shakllanishi: stoxastik o'yin quyidagi olti elementdan iborat kortej bilan aniqlanadi:

$$G = (N, S, \{A_i\}_{i \in N}, P, \{r_i\}_{i \in N}, \beta)$$

Bu yerda $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — o'yinchilar to'plami, S — chekli holatlar to'plami, A_i — i-o'yinchining harakatlari to'plami, $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ — qo'shma harakatlar to'plami, $P : S \times A \rightarrow \Delta(S)$ — stoxastik o'tish funksiyasi, $r_i : S \times A \rightarrow R$ — i-o'yinchining mukofot funksiyasi, $\beta \in [0, 1)$ — diskont koeffitsienti.

O'tish ehtimolligi quyidagicha aniqlanadi:

$$P(s' | s, a) = Pr\{s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = a\}$$

Har bir o'yinchining strategiyasi (siyosati) $\pi_i : S \rightarrow \Delta(A_i)$ akslantirish bilan ifodalanadi — har bir holatga harakatlar to'plami ustidagi ehtimollik taqsimoti mos qo'yiladi. Qo'shma siyosat ostida i-o'yinchining kutiladigan diskontlangan jami mukofoti — qiymat funksiyasi:

$$V_i^{\pi}(s) = E[\sum \beta^t \cdot r_i(s_t, a_t) | s_0 = s, \pi], t = 0, 1, 2, \dots$$

Nol yig'indili ikki o'yinchili holat ($n = 2, r_1 + r_2 = 0$) eng yaxshi o'rganilgan sinf hisoblanadi. Shapley teoremasi (1953) bu sinf uchun yagona qiymat funksiyasi $V^*(s)$ ning mavjudligini isbotlaydi va u quyidagi rekurrent Bellman-Shapley tenglamasini qondiradi:

$$V^*(s) = val_{a_1, a_2} \{ r(s, a_1, a_2) + \beta \cdot \sum P(s' | s, a_1, a_2) \cdot V^*(s') \}$$

Bu yerda val belgisi har bir holatdagi matritsaviy o'yinning minimaks (qiymat) operatori. 2×2 matritsa $A = [[a, b], [c, d]]$ uchun agar matritsada saddle point (sof muvozanat) bo'lmasa, qiymat quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$val(A) = (a \cdot d - b \cdot c) / (a + d - b - c)$$

Saddle point mavjud holatda esa qiymat shu nuqtadagi mukofot qiymatiga teng bo'ladi. Qiymat iteratsiyasi algoritmidan boshlang'ich yaqinlashish $V_0(s) = 0$ deb olinadi va har bir k qadamda quyidagi yangilanish amalga oshiriladi:

$$V_{k+1}(s) = val \{ r(s, a_1, a_2) + \beta \cdot \sum P(s' | s, a_1, a_2) \cdot V_k(s') \}$$

Diskontlangan holatda ($\beta < 1$) bu iteratsiya yagona barqaror nuqtaga qarab geometrik tezlikda yaqinlashadi: $|V_k - V^*| \leq \beta^k \cdot |V_0 - V^*|$.

Ikki raqobatdosh firma — 1-firma (P_1 , foyda maksimizatori) va 2-firma (P_2 , raqib, P_1 ning foydasini minimizatori) bozorda reklama strategiyalari bilan kurashmoqda. Bozor holati ikki qiymatdan birini olishi mumkin: s_1 — yuqori talab davri, s_2 — past talab davri. Har bir o'yinchi ikki harakatdan birini tanlaydi: 1-firma U (aggressiv reklama) yoki D (engil reklama); 2-firma esa L (aggressiv qarshi reklama) yoki R (engil qarshi reklama). Qo'shma harakatlar 1-firmaning kvartal foydasini (milliard so'mda) belgilaydi. Mukofot matritsalarini (1-firma uchun, 2-firma uchun teskari ishorada) quyidagicha berilgan:

$$G(s_1) = [[5, 1], [3, 2]], \quad G(s_2) = [[1, 4], [2, 3]]$$

O'tishlar quyidagi ikkilamchi qonuniyat bilan tavsiflanadi: yuqori talab davridan keyin har qanday harakatlar natijasida bozor past talab davriga o'tadi va aksincha — past talab davridan keyin bozor yuqori talab davriga qaytadi. Ya'ni o'tishlar deterministik:

$$P(s_2 | s_1, a_1, a_2) = 1, \quad P(s_1 | s_2, a_1, a_2) = 1$$

Diskont koeffitsienti $\beta = 0.5$ deb qabul qilinadi. Quyida masalaning barcha kirish ma'lumotlari 1-jadvalda jamlangan.

1-jadval. Markov o'yinining kirish parametrlari

Parametr	Qiymat / Tavsif
O'yinchilar	P_1 — maksimizator, P_2 — minimizator
Holatlar to'plami S	{s_1, s_2}
1-o'yinchining harakatlari A_1	{U, D}
2-o'yinchining harakatlari A_2	{L, R}
Mukofot matritsasi G(s_1)	[[5, 1], [3, 2]]
Mukofot matritsasi G(s_2)	[[1, 4], [2, 3]]
O'tish s_1 dan	har bir (a_1, a_2) → s_2
O'tish s_2 dan	har bir (a_1, a_2) → s_1
Diskont koeffitsienti β	0.5
Topish kerak	V*(s_1), V*(s_2) va optimal siyosat

Yechish algoritmi quyidagicha: $V_0(s_1) = V_0(s_2) = 0$ deb boshlaymiz va $k = 1, 2, 3, \dots$ qadamlarda Bellman-Shapley tenglamasini ketma-ket qo'llaymiz. Har bir qadamda Q-matritsa tuziladi va uning val qiymati yangi V_k qiymatini beradi.

[k = 1] iteratsiya — boshlang'ich qiymatlardan birinchi yangilanish

Boshlang'ich qiymatlar $V_0(s_1) = V_0(s_2) = 0$ bo'lganligi sababli Q-matritsalar dastlabki mukofot matritsalariga teng:

$$Q_1(s_1) = G(s_1) + \beta \cdot V_0(s_2) \cdot 1 = [[5, 1], [3, 2]]$$

$$Q_1(s_2) = G(s_2) + \beta \cdot V_0(s_1) \cdot 1 = [[1, 4], [2, 3]]$$

$Q_1(s_1)$ matritsasini tahlil qilamiz. 1-o'yinchining maximin qiymati: $\min(5, 1) = 1$ (U qatori), $\min(3, 2) = 2$ (D qatori), maksimumi 2 — bu D harakatda erishiladi. 2-o'yinchining minimax qiymati: $\max(5, 3) = 5$ (L ustuni), $\max(1, 2) = 2$ (R ustuni), minimumi 2 — bu R harakatda erishiladi. Maximin va minimax qiymatlari tengligi (D, R) sof muvozanat (saddle point) ekanligini bildiradi:

$$val(Q_1(s_1)) = 2, \quad muvozanat: (D, R)$$

$Q_1(s_2)$ matritsasini tahlil qilamiz. Maximin: $\min(1, 4) = 1$, $\min(2, 3) = 2$, maksimumi 2 — D qatorda. Minimax: $\max(1, 2) = 2$, $\max(4, 3) = 4$, minimumi 2 — L ustunda. Saddle point (D, L):

$$val(Q_1(s_2)) = 2, \text{ muvozanat: } (D, L)$$

Birinchi iteratsiyaning natijalari:

$$V_1(s_1) = 2, V_1(s_2) = 2$$

[k = 2] iteratsiya — kelajakdagi qiymatlarni hisobga olish

Endi kelajakdagi qiymatlar $V_1(s_1) = V_1(s_2) = 2$ ni har bir katakka qo'shamiz. O'tishlar deterministik bo'lgani uchun s_1 holatdagi har bir qo'shma harakat keyingi qadamda s_2 holatga olib keladi, demak $\beta \cdot V_1(s_2) = 0.5 \cdot 2 = 1$ qiymati har bir katakka qo'shiladi:

$$Q_2(s_1) = G(s_1) + 1 \cdot 1 = [[5 + 1, 1 + 1], [3 + 1, 2 + 1]] = [[6, 2], [4, 3]]$$

$$Q_2(s_2) = G(s_2) + 1 \cdot 1 = [[1 + 1, 4 + 1], [2 + 1, 3 + 1]] = [[2, 5], [3, 4]]$$

$Q_2(s_1)$ ning saddle pointi: maximin = max(min(6,2), min(4,3)) = max(2, 3) = 3 (D qatorda), minimax = min(max(6,4), max(2,3)) = min(6, 3) = 3 (R ustunda). (D, R) — saddle point. $Q_2(s_2)$ ning saddle pointi: maximin = max(2, 3) = 3 (D qatorda), minimax = min(3, 5) = 3 (L ustunda). (D, L) — saddle point.

$$val(Q_2(s_1)) = 3, val(Q_2(s_2)) = 3$$

Ikkinchi iteratsiyaning natijalari:

$$V_2(s_1) = 3, V_2(s_2) = 3$$

[k = 3] iteratsiya — qiymat funksiyasining yana yangilanishi

$\beta \cdot V_2(s_2) = 0.5 \cdot 3 = 1.5$ har bir katakka qo'shiladi:

$$Q_3(s_1) = G(s_1) + 1.5 \cdot 1 = [[6.5, 2.5], [4.5, 3.5]]$$

$$Q_3(s_2) = G(s_2) + 1.5 \cdot 1 = [[2.5, 5.5], [3.5, 4.5]]$$

$Q_3(s_1)$ da: maximin = max(min(6.5, 2.5), min(4.5, 3.5)) = max(2.5, 3.5) = 3.5 (D), minimax = min(max(6.5, 4.5), max(2.5, 3.5)) = min(6.5, 3.5) = 3.5 (R). Saddle (D, R) = 3.5. $Q_3(s_2)$ da: maximin = max(2.5, 3.5) = 3.5 (D), minimax = min(3.5, 5.5) = 3.5 (L). Saddle (D, L) = 3.5.

$$V_3(s_1) = 3.5, V_3(s_2) = 3.5$$

[k = 4] iteratsiya — barqarorlikka yaqinlashuv

$\beta \cdot V_3(s_2) = 0.5 \cdot 3.5 = 1.75$ har bir katakka qo'shiladi:

$$Q_4(s_1) = G(s_1) + 1.75 \cdot 1 = [[6.75, 2.75], [4.75, 3.75]]$$

$$Q_4(s_2) = G(s_2) + 1.75 \cdot 1 = [[2.75, 5.75], [3.75, 4.75]]$$

Saddle pointlar bir xil pozitsiyalarda saqlanib qolmoqda: $Q_4(s_1)$ da (D, R) = 3.75, $Q_4(s_2)$ da (D, L) = 3.75. Iteratsiya natijalari:

$$V_4(s_1) = 3.75, V_4(s_2) = 3.75$$

Yopiq yechim va konvergenstiya

Iteratsiyalardan ko'rinib turibdiki, har bir qadamda $V_k(s_1) = V_k(s_2)$ tengligi bajariladi (ikkala holat ham simmetrik tarzda bog'langan) va saddle pointlarning pozitsiyasi o'zgarmaydi: barcha k uchun s_1 da (D, R), s_2 da (D, L). Bu qonuniyat konvergent qiymatni yopiq formula bilan topishga imkon beradi. Bellman-Shapley tenglamasi ushbu masalada quyidagi sodda chiziqli sistemaga keltiriladi:

$$V^*(s_1) = 2 + 0.5 \cdot V^*(s_2)$$

$$V^*(s_2) = 2 + 0.5 \cdot V^*(s_1)$$

Birinchi tenglikni ikkinchisiga qo'yamiz:

$$V^*(s_1) = 2 + 0.5 \cdot (2 + 0.5 \cdot V^*(s_1)) = 3 + 0.25 \cdot V^*(s_1)$$

Bu tenglikdan:

$$0.75 \cdot V^*(s_1) = 3 \Rightarrow V^*(s_1) = 4$$

Mos ravishda:

$$V^*(s_2) = 2 + 0.5 \cdot 4 = 4$$

Shunday qilib, o'yinning konvergent qiymatlari $V^*(s_1) = V^*(s_2) = 4$ milliard so'm. Iteratsiya jarayoni geometrik tezlikda bu nuqtaga yaqinlashadi: $V_k(s) = 4 - 2^{-(k-1)}$, $k \rightarrow \infty$ da $V_k \rightarrow 4$. Hisoblash natijalari quyidagi 2-jadvalda jamlangan.

2-jadval. Bellman-Shapley qiymat iteratsiyasi natijalari

k	$V_k(s_1)$	$V_k(s_2)$	$ V_k - V^* $	Optimal harakatlar ($s_1; s_2$)
0	0.000	0.000	4.000	—
1	2.000	2.000	2.000	(D, R); (D, L)
2	3.000	3.000	1.000	(D, R); (D, L)
3	3.500	3.500	0.500	(D, R); (D, L)
4	3.750	3.750	0.250	(D, R); (D, L)
5	3.875	3.875	0.125	(D, R); (D, L)
6	3.938	3.938	0.062	(D, R); (D, L)
∞	4.000	4.000	0.000	(D, R); (D, L) ✓

Optimal siyosat va uning iqtisodiy ma'nosi

Saddle pointlarning barqaror pozitsiyasi har bir holatda o'yinchilar uchun sof (deterministik) optimal siyosatni belgilaydi. Topilgan muvozanat siyosatlari quyidagi 3-jadvalda taqdim etilgan.

3-jadval. Optimal muvozanat siyosatlari

Holat	1-firma (P_1) siyosati π_1^*	2-firma (P_2) siyosati π_2^*	Bir qadam mukofoti	Iqtisodiy ma'no
s_1 (yuqori talab)	D (engil reklama)	R (engil qarshi reklama)	$G(s_1)[D, R] = 2$	Talab yuqori bo'lgani uchun ortiqcha reklamaga ehtiyoj yo'q

s ₂ (past talab)	D (engil reklama)	L (aggressiv qarshi reklama)	$G(s_2)[D, L] = 2$	Past talabda raqib aktiv harakat qiladi, P ₁ esa qimmat reklamadan saqlanadi
-----------------------------	-------------------	------------------------------	--------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------

OPTIMAL YECHIM. O'yinning qiymat funksiyasi $V^*(s_1) = V^*(s_2) = 4$ milliard so'm — bu 1-firmaning har qanday boshlang'ich holatdan boshlab uzoq muddatli kutiladigan diskontlangan jami foydasi. Optimal siyosatlar deterministik (sof strategiyalar) bo'lib, ikkala holat uchun ham 1-firma D harakatini tanlaydi, 2-firma esa s₁ da R, s₂ da L harakatini tanlaydi. Bu strategiyalar Bellman-Shapley tenglamasining barqaror nuqtasi sifatida topildi va Nash muvozanatining ham talablarini qondiradi.

Xulosa: Berilgan ikki holatli, ikki harakatli nol yig'indili Markov o'yinida 1-firmaning uzoq muddatli foydasi 4 milliard so'mga teng ekanligi aniqlandi. Bunga qiymat iteratsiyasining 6-7 qadamida amaliy aniqlik bilan, cheksizlikda esa aynan erishiladi. Iqtisodiy tahlil shuni ko'rsatadiki, bozor talab darajasidan qat'i nazar 1-firma uchun engil reklama strategiyasi optimal hisoblanadi: yuqori talab davrida ortiqcha xarajatga hojat yo'q, past talab davrida esa qimmat reklama qilish tavakkalchilikka olib keladi. Topilgan natija Shapley teoremasini va Bellman-Shapley tenglamasining nol yig'indili Markov o'yinlari uchun samaradorligini amalda tasdiqlaydi.

Mazkur tadqiqot doirasida olingan asosiy natijalar quyidagicha umumlashtiriladi:

1) Markov o'yinlari nazariyasi tizimli tarzda klassifikatsiya qilindi: nol yig'indili va umumiy yig'indili, kooperativ va kooperatsiz, chekli va cheksiz gorizontli, diskontlangan va o'rtacha mukofotli sinflar ajratildi va har birining matematik xususiyatlari bayon qilindi.

2) Nazariy tahlil amaliy raqobat masalasiga tatbiq etilib, Bellman-Shapley qiymat iteratsiyasi algoritmi 6 qadam davomida qadam-baqadam batafsil bajarildi va har bir iteratsiyada saddle point pozitsiyalari aniqlandi.

3) Optimal qiymat funksiyasi $V^*(s_1) = V^*(s_2) = 4$ milliard so'm ekanligi ham iteratsiya orqali, ham yopiq chizikli sistemani yechish orqali tasdiqlandi. Iteratsiya geometrik tezlikda yaqinlashishi (xato $\beta = 0.5$ ko'rsatkichli geometrik progressiya bo'yicha kamayadi) ko'rsatildi.

4) Optimal muvozanat siyosatlari sof strategiyalar shaklida topildi: $\pi_1^*(s_1) = \pi_1^*(s_2) = D$ (1-firma har doim engil reklama qiladi), $\pi_2^*(s_1) = R$, $\pi_2^*(s_2) = L$

(2-firma yuqori talabda engil, past talabda aggressiv qarshi reklama tanlaydi). Bu siyosat Nash muvozanati shartlarini qondiradi.

5) Olingan natija Shapley teoremasini empirik tarzda tasdiqlaydi: diskontlangan nol yig'indili Markov o'yinida yagona qiymat funksiyasi mavjud bo'lib, u Bellman-Shapley rekurrent tenglamasini qondiradi va qiymat iteratsiyasi algoritmi orqali samarali topiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Shapley L. S. Stochastic Games // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 1953. — Vol. 39, No. 10. — P. 1095–1100.
2. Bellman R. E. Dynamic Programming. — Princeton: Princeton University Press, 1957. — 342 p.
3. Puterman M. L. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. — New York: John Wiley & Sons, 1994. — 649 p.
4. Filar J., Vrieze K. Competitive Markov Decision Processes. — New York: Springer-Verlag, 1997. — 393 p.
5. Neyman A., Sorin S. (eds.) Stochastic Games and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 476 p.
6. Başar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd edition. — London: Academic Press, 1995. — 519 p.
7. Littman M. L. Markov Games as a Framework for Multi-Agent Reinforcement Learning // Proceedings of the 11th International Conference on Machine Learning. — 1994. — P. 157–163.
8. Sutton R. S., Barto A. G. Reinforcement Learning: An Introduction, 2nd edition. — Cambridge: MIT Press, 2018. — 552 p.
9. Mamadaliyev N., Tuxtasinov M. Variatsion hisob va optimal boshqaruvning asosiy masalalari. — Toshkent: Universitet, 2013. — 188 b.
10. Owen G. Game Theory, 3rd edition. — San Diego: Academic Press, 1995. — 459 p.