ISSN:3030-3621

Ta'lim innovatsiyasi va integratsiyasi

OPTIMAL BOSHQARISH MASALALARINI YECHISH UCHUN IZOXRON USUL VA UNI PONTRYAGIN MAKSIMUM PRINTSIPI YORDAMIDA TATBIQ ETISH

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna
Farg'ona davlat universiteti dotsenti,
Pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
E-mail: mamatova.zilolakhon@gmail.com
Orcid: 0009-0009-9247-3510
Abduvahobova Muslima
Farg'ona davlat universiteti,
amaliy matematika yo'nalishi 23.07-guruh talabasi
E-mail: abduvaxobovamuslima30@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada dinamik tizimlarning optimal boshqarish masalalarini yechishda qo'llaniladigan izoxron usul batafsil tahlil qilinadi va uning amaliy tatbiqi aniq misol asosida ko'rsatiladi. Izoxron variatsiya — bu vaqt chegaralari t_0 va t_f qat'iy saqlangan holda, faqat holat va boshqaruv trayektoriyalari kichik variatsiyaga uchratiladigan klassik variatsion hisob usuli bo'lib, uning yordamida Pontryagin maksimum printsipi qat'iy matematik asosda keltirib chiqariladi. Maqolada Gamilton funksiyasi, qo'shma o'zgaruvchilar va kanonik tenglamalar tizimi yordamida masala yechilishining bosqichma-bosqich algoritmi keltiriladi. Nazariy tahlil natijalari kosmik apparatning bir o'lchamli optimal harakat masalasi misolida amalda qo'llanilib, optimal boshqaruv funksiyasi, qo'shma o'zgaruvchi va trayektoriya analitik usulda topiladi.

Kalit so'zlar: optimal boshqarish, izoxron variatsiya, Pontryagin maksimum printsipi, Gamilton funksiyasi, qo'shma o'zgaruvchilar, kanonik tenglamalar, ekstremal trayektoriya, ko'ndalang shartlar, dinamik tizim, variatsion hisob.

Annotation. This article presents a detailed analysis of the isochronous method used to solve optimal control problems in dynamical systems and demonstrates its practical application through a concrete example. Isochronous variation is a classical technique in the calculus of variations whose essence lies in keeping the time endpoints t_0 and t_f fixed while introducing small variations only in the state and control trajectories. By means of this method, the Pontryagin maximum principle is rigorously derived. The paper outlines a step-by-step solution algorithm using the Hamiltonian function, costate variables, and the system of canonical equations. The theoretical results are then applied to a one-dimensional optimal motion problem of a spacecraft, where the optimal control function, costate variable, and trajectory are obtained analytically.

Keywords: optimal control, isochronous variation, Pontryagin maximum principle, Hamiltonian, costate variables, canonical equations, extremal trajectory, transversality conditions, dynamical system, calculus of variations.

Аннотация. В данной статье подробно анализируется изохронный метод, применяемый при решении задач оптимального управления в динамических системах, и его практическое применение демонстрируется на конкретном примере. Изохронная вариация — это классический метод вариационного исчисления, суть которого заключается в фиксированном сохранении временных границ t_0 и t_f при внесении малых вариаций только в траектории состояния и управления. С помощью этого метода строго математически выводится принцип максимума Понтрягина. В статье излагается пошаговый алгоритм решения с использованием функции Гамильтона, сопряжённых переменных и системы канонических уравнений. Теоретические результаты применяются к задаче одномерного оптимального движения космического аппарата, где аналитически находятся оптимальная функция управления, сопряжённая переменная и траектория.

Ключевые слова: оптимальное управление, изохронная вариация, принцип максимума Понтрягина, функция Гамильтона, сопряжённые переменные, канонические уравнения, экстремальная траектория, условия трансверсальности, динамическая система, вариационное исчисление.

Zamonaviy fan va texnikaning aerokosmik sanoat, robototexnika, elektr muhandislik, iqtisodiyot va sun'iy intellekt kabi keng sohalarida dinamik tizimlarni optimal boshqarish masalasi markaziy o‘rinni egallaydi. Raketa va sun'iy yo‘ldoshlarning orbita trayektoriyalarini rejalashtirish, robotlar harakatini optimallashtirish, sanoat ishlab chiqarishini boshqarish, iqtisodiy tizimlarda investitsion siyosatni rejalashtirish — bularning barchasi vaqt bo‘yicha rivojlanayotgan tizimning biror maqsad funksionalini ekstremallashtiradigan boshqaruv funksiyasini topishni talab qiladi.

Optimal boshqarish nazariyasining mustaqil matematik fan sifatida shakllanishi XX asrning 50–60-yillariga to‘g‘ri keladi. Sovet matematigi L. S. Pontryagin va uning shogirdlari V. G. Boltyanskiy, R. V. Gamkrelidze va Ye. F. Mishchenko tomonidan yaratilgan maksimum printsipi — variatsion hisobning klassik usullarining dinamik cheklovli masalalarga kengaytirilishi — ushbu sohaning fundamental natijasi bo‘ldi. Pontryagin maksimum printsipini isbotlash va uning shartlarini olishda izoxron variatsiya usuli markaziy rol o‘ynaydi.

Ushbu usulning mohiyati vaqtning boshlang‘ich va oxirgi nuqtalarini qat'iy saqlab, trayektoriyaning faqat shaklini kichik variatsiyalarga uchratishdan iboratdir. Atamaning yunoncha ildizi — "izos" (bir xil) va "chronos" (vaqt) — usulning geometrik mazmunini yaxshi aks ettiradi: variatsiya ostida vaqt chegaralari o‘zgarmaydi. Bu usul variatsion hisobning klassik Eyler-Lagranj tenglamalarini olishda qo‘llaniladi va Pontryagin maksimum printsipining aniq matematik asosini ta'minlaydi.

Ushbu maqolada quyidagi amaliy vaziyat ko‘rib chiqiladi: kosmik apparat to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanmoqda. Apparatning boshlang‘ich vaziyati $t = 0$ paytda $x_0 = 2$ metrga teng. Belgilangan $T = 2$ sekund vaqt ichida apparat manzil nuqtasiga ($x_T = 0$) yetib borishi kerak. Boshqaruv signali $u(t)$ — apparatning tezlik o‘zgartirish vositasidir. Maqsad — apparatning yoqilg‘i sarfini (boshqaruv energiyasini) minimallashtiruvchi optimal $u^*(t)$ boshqaruv funksiyasini va mos optimal trayektoriya $x^*(t)$ ni topishdir. Masalani yechish uchun izoxron usul asosida olingan Pontryagin maksimum printsipi qo‘llaniladi.

Optimal boshqarish masalasining matematik shakllanishi: holat vektori $x(t) \in R^n$, boshqaruv vektori $u(t) \in U \subseteq R^m$, vaqt oralig‘i $[t_0, t_f]$ qat'iy belgilangan. Tizimning dinamikasi quyidagi differensial tenglama bilan beriladi:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f$$

Maqsad funksionali Bolza shaklida quyidagicha yoziladi:

$$J(u) = \Phi(x(t_f)) + \int L(t, x(t), u(t))\, dt,\ t \in [t_0, t_f] \ \rightarrow \ min$$

Bu yerda $L(t, x, u)$ — oraliq (integral) mukofot funksiyasi, $\Phi(x(t_f))$ — terminal (chegaraviy) funksional, $f(t, x, u)$ — tizimning dinamikasini belgilovchi silliq vektor funksiya. Ko‘p amaliy holatlarda $\Phi \equiv 0$ bo‘lishi mumkin (chegara qattiq qotirilgan holatda).

Izoxron variatsiya tushunchasi: optimal $x^*(t)$ trayektoriyaning izoxron variatsiyasi deganda vaqt chegaralari t_0 va t_f qat'iy saqlanib, trayektoriyaning o‘zi quyidagi ko‘rinishda kichik o‘zgartirilishi tushuniladi:

$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon \cdot \eta(t),\ \eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$$

Bu yerda ε — kichik haqiqiy parametr, $\eta(t)$ — chegaralarda yo‘qoluvchi silliq variatsion vektor funksiya. Aynan shu xususiyat ($\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0$) ushbu usulni izoxron deb atash uchun asos beradi: variatsiya ostida vaqt chegaralari o‘zgarmaydi.

Gamilton funksiyasi (Gamiltoniani) qo‘shma o‘zgaruvchilar vektori $\psi(t) \in R^n$ yordamida quyidagicha aniqlanadi:

$$H(t, x, u, \psi) = L(t, x, u) + \langle \psi, f(t, x, u) \rangle$$

Bu yerda $\langle \cdot,\cdot \rangle$ skalyar ko‘paytmani bildiradi. Pontryagin maksimum printsipi bo‘yicha (1956), agar $u^*(t)$ — optimal boshqaruv va $x^*(t)$ — unga mos trayektoriya bo‘lsa, u holda shunday $\psi^*(t)$ qo‘shma funksiya mavjudki, barcha $t \in [t_0, t_f]$ uchun quyidagi uchta shart bir vaqtda bajariladi. Birinchidan, qo‘shma tenglama:

$$\dot{\psi}\hat{}^*(t) = -\partial H / \partial x\ (t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))$$

Ikkinchidan, holat tenglamasi:

$$\dot{x}\hat{}^*(t) = \partial H/\partial\psi\,(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = f(t, x^*, u^*)$$

Uchinchidan, optimal boshqaruv Gamilton funksiyasini minimallashtiradigan (cost minimizatsiyasi uchun) qiymatda tanlanadi:

$$u^*(t) = arg\,min\,H(t, x^*(t), u, \psi^*(t)),\ \ u \in U$$

Boshqaruv ichki nuqtada boʻlganda bu shart sodda differensiyalash shartiga keltiriladi:

$$\partial H/\partial u\,(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = 0$$

Izoxron usulning eng goʻzal jihati shundaki, yuqoridagi barcha shartlar J funksionalning izoxron variatsiya ostidagi birinchi variatsiyasi nolga teng boʻlishi sharti $\delta J = 0$ dan kelib chiqadi. Bu yondashuv variatsion hisobning klassik Eyler-Lagranj tenglamalarini boshqaruvli tizimlarga umumlashmasi hisoblanadi.

Kosmik apparat toʻgʻri chiziq boʻylab harakatlanmoqda. Apparatning joriy mavqei $x(t)$ (metr), boshqaruv signali $u(t)$ — uning tezligini belgilovchi parametrdir. Tizimning dinamik tenglamasi quyidagicha:

$$\dot{x}(t) = u(t),\ \ t \in [0, 2]$$

Boshlangʻich va terminal shartlar:

$$x(0) = 2,\ \ x(2) = 0$$

Maqsad — boshqaruv energiyasini (yoqilgʻi sarfini) minimallashtirish:

$$J(u) = \int\ (1/2)\,u^2(t)\,dt,\ \ t \in [0, 2]\ \ \rightarrow\ \ min$$

Berilgan masalaga mos elementlar quyidagilardir: $f(t, x, u) = u$, $L(t, x, u) = (1/2)\,u^2$, $\Phi \equiv 0$, $U = R$ (cheklovsiz boshqaruv). Masalaning barcha kirish parametrlari quyidagi 1-jadvalda jamlangan.

1-jadval. Optimal boshqarish masalasining kirish parametrlari

Parametr	**Qiymat / Tavsif**
Holat oʻzgaruvchisi $x(t)$	Apparatning t paytdagi mavqei (m)
Boshqaruv $u(t)$	Apparatning tezligi (m/s)
Dinamik tenglama $f(t, x, u)$	$u(t)$
Oraliq mukofot $L(t, x, u)$	$(1/2)\,u^2(t)$
Terminal funksional Φ	0 (yoʻq)
Vaqt oraligʻi $[t_0, t_f]$	$[0, 2]$ (2 sekund)
Boshlangʻich shart $x(0)$	2 m
Terminal shart $x(2)$	0 m (manzil)
Boshqaruv toʻplami U	R (cheklovsiz)
Topish kerak	$u^*(t), x^*(t), \psi^*(t), J^*$

Masalani Pontryagin maksimum printsipi yordamida olti qadamda yechamiz. Har bir qadamda izoxron usul orqali olingan zaruriy shartlar ketma-ket qoʻllaniladi.

[1-qadam] Gamilton funksiyasini yozish

Gamilton funksiyasini umumiy formula bo‘yicha yozamiz: $H = L + \psi \cdot f$. Berilgan masalada $L = (1/2)\, u^2$, $f = u$, qo‘shma o‘zgaruvchi esa skalar $\psi(t)$ bo‘ladi (chunki holat fazosi bir o‘lchamli). Shunday qilib:

$$H(t, x, u, \psi) = (1/2)\, u^2 + \psi \cdot u$$

E'tibor bering: H Gamiltoniani x ga bevosita bog‘liq emas, bu qo‘shma tenglamani sodda shaklga keltiradi.

[2-qadam] Maksimum (minimum) sharti orqali optimal boshqaruvni topish

Boshqaruv to‘plami $U = R$ cheklovsiz bo‘lganligi uchun optimal $u^*(t)$ ni Gamilton funksiyasini u bo‘yicha differensiyalash sharti orqali topamiz. $\partial H/\partial u$ ni hisoblaymiz:

$$\partial H/\partial u = u + \psi$$

Kritik nuqta sharti $\partial H/\partial u = 0$ dan:

$$u + \psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^*(t) = -\psi(t)$$

Bu nuqta haqiqatan ham minimum nuqtasidir, chunki ikkinchi tartibli hosila $\partial^2 H/\partial u^2 = 1 > 0$ (Gamilton funksiyasi u bo‘yicha qavariq).

[3-qadam] Qo‘shma tenglamani yozish va yechish

Qo‘shma tenglama umumiy formula bo‘yicha $\dot{\psi} = -\partial H/\partial x$. Bizning masalada $H = (1/2)\, u^2 + \psi \cdot u$ — x ga bevosita bog‘liq emas, demak:

$$\partial H/\partial x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\psi}(t) = 0$$

Bu oddiy differensial tenglamani integrallaymiz:

$$\psi(t) = \psi_0 = const, \; t \in [0, 2]$$

Bu yerda ψ_0 — keyingi qadamlarda chegaraviy shart yordamida aniqlanadigan integratsiya konstantasi.

[4-qadam] Holat tenglamasini integrallash

2-qadamdan $u^*(t) = -\psi(t) = -\psi_0$ ekanligini bilamiz. Buni dinamik tenglamaga qo‘yamiz:

$$\dot{x}\hat{}^*(t) = u^*(t) = -\psi_0$$

Bu tenglamani $[0, t]$ oralig‘ida integrallaymiz:

$$x^*(t) = x^*(0) - \psi_0 \cdot t = 2 - \psi_0 \cdot t$$

[5-qadam] Terminal shartdan ψ_0 ni topish

Trayektoriyaning oxirgi nuqtasidagi shart $x^*(2) = 0$ ni qo‘llaymiz:

$$x^*(2) = 2 - \psi_0 \cdot 2 = 0$$

$$2\,\psi_0 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \psi_0 = 1$$

Topilgan $\psi_0 = 1$ qiymatini barcha funksiyalarga qo‘yamiz:

$$\psi^*(t) = 1, \; u^*(t) = -1, \; x^*(t) = 2 - t$$

[6-qadam] Optimal maqsad funksionalining qiymatini hisoblash

Topilgan optimal boshqaruv $u^*(t) = -1$ ni asl maqsad funksionaliga qo‘yib hisoblaymiz:

$$J^* = \int (1/2)\,(u^*(t))^2\,dt = \int (1/2)\cdot 1\,dt,\ \ t \in [0,2]$$
$$J^* = (1/2)\cdot 2 = 1$$

Shunday qilib, optimal yoqilg‘i sarfi (boshqaruv energiyasi) $J^* = 1$ birlikni tashkil etadi.

Yechimning tekshirilishi

Olingan yechimning to‘g‘riligini bir necha mezon bo‘yicha tekshiramiz. Birinchidan, holat tenglamasini tekshiramiz: $\dot{x}\wedge^*(t) = d(2-t)/dt = -1$, va $u^*(t) = -1$, demak $\dot{x}\wedge^*(t) = u^*(t)$ ✓. Ikkinchidan, chegaraviy shartlarni tekshiramiz: $x^*(0) = 2 - 0 = 2$ ✓, $x^*(2) = 2 - 2 = 0$ ✓. Uchinchidan, maksimum (minimum) shartini tekshiramiz: $\partial H/\partial u = u + \psi = (-1) + 1 = 0$ ✓. To‘rtinchidan, qo‘shma tenglamani tekshiramiz: $\dot{\psi}\wedge^*(t) = d(1)/dt = 0$, va $\partial H/\partial x = 0$, demak $\dot{\psi}\wedge^* = -\partial H/\partial x$ ✓. Barcha shartlar to‘liq qondirilgan.

2-jadval. Pontryagin maksimum printsipi qadamlari va natijalari

№	Qadam	Formula / Tenglama	Natija
1	Gamiltonian	$H = (1/2)\,u^2 + \psi\,u$	H aniqlandi
2	Maksimum sharti	$\partial H/\partial u = u + \psi = 0$	$u^* = -\psi$
3	Qo‘shma tenglama	$\dot{\psi} = -\partial H/\partial x = 0$	$\psi^* = \psi_0$ const
4	Holat integratsiyasi	$\dot{x}\wedge^* = -\psi_0$	$x^*(t) = 2 - \psi_0 \cdot t$
5	Chegaraviy shart	$x^*(2) = 2 - 2\,\psi_0 = 0$	$\psi_0 = 1$
6	Maqsad funksionali	$J^* = \int (1/2) \cdot 1\,dt$	$J^* = 1$

3-jadval. Optimal trayektoriya, boshqaruv va qo‘shma o‘zgaruvchining qiymatlari

Vaqt t (s)	$x^*(t)$ — **mavqe (m)**	$u^*(t)$ — **boshqaruv (m/s)**	$\psi^*(t)$ — **qo‘shma o‘zgaruvchi**	H **qiymati**

0.00	2.00	− 1	1	− 0.5
0.50	1.50	− 1	1	− 0.5
1.00	1.00	− 1	1	− 0.5
1.50	0.50	− 1	1	− 0.5
2.00	0.00	− 1	1	− 0.5

OPTIMAL YECHIM. Pontryagin maksimum printsipining barcha shartlari to‘liq qondirilgan holda topilgan optimal yechim quyidagicha: optimal boshqaruv $u^*(t) = -1$ (m/s) — vaqt davomida o‘zgarmas konstanta; optimal trayektoriya $x^*(t) = 2 - t$ — to‘g‘ri chiziqli kamayuvchi funksiya; qo‘shma o‘zgaruvchi $\psi^*(t) = 1$ — vaqt bo‘yicha o‘zgarmas; maqsad funksionalining minimal qiymati $J^* = 1$ birlik. Iqtisodiy ma'noda bu shuni anglatadiki, kosmik apparatni 2 metr masofadan manzilga olib borishning eng arzon strategiyasi — har bir paytda bir xil -1 m/s tezlikda harakatlanish, ya'ni tekis (uniform) harakatdir.

Xulosa: Berilgan optimal boshqarish masalasi izoxron usul asosida olingan Pontryagin maksimum printsipi yordamida 6 qadamda to‘liq yechildi. Olingan optimal boshqaruv funksiyasi tekis chiziqli (lineer) trayektoriyani ta'minlaydi, bu esa kvadratik mukofot funksiyasi ostida sezgir bo‘lgan masalalar uchun klassik LQ-yondashuvning asosiy xususiyati hisoblanadi. Topilgan natija dinamik dasturlashning Gamilton-Yakobi-Bellman tenglamasi orqali olingan yechim bilan ham mos kelishi izoxron usulning tegishli usullar bilan ekvivalentligini va matematik to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Mazkur tadqiqot doirasida olingan asosiy natijalar quyidagicha umumlashtiriladi:

1) Izoxron usul orqali Pontryagin maksimum printsipi qat'iy matematik asosda keltirib chiqarildi va uning uch asosiy sharti — Gamilton funksiyasining maksimum (minimum) sharti, qo‘shma tenglama va holat tenglamasi — yagona kanonik tizimga birlashtirildi.

2) Aniq amaliy masala — kosmik apparatning bir o‘lchamli optimal harakati — bosqichma-bosqich (oltita ketma-ket qadamda) yechilib, har bir qadamda matematik tenglamalar va izoxron usulning tegishli shartlari batafsil qo‘llanildi.

3) Optimal boshqaruv $u^*(t) = -1$, optimal trayektoriya $x^*(t) = 2 - t$ va qo‘shma o‘zgaruvchi $\psi^*(t) = 1$ analitik usulda topildi. Maqsad funksionalining minimal qiymati $J^* = 1$ birlikni tashkil etadi.

4) Topilgan yechimning to‘g‘riligi to‘rtta nazorat mezoni bo‘yicha tekshirildi: holat tenglamasi, chegaraviy shartlar, maksimum sharti va qo‘shma tenglama. Barcha shartlar to‘liq qondirildi.

5) Olingan natija izoxron usulning klassik LQ (chiziqli-kvadratik) boshqarish masalalari uchun samarali analitik vosita ekanligini va uning aerokosmik,

robototexnika, iqtisodiyot kabi sohalardagi amaliy muammolarni yechishda asosiy matematik apparat sifatida qo‘llanilishi mumkinligini tasdiqlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. — New York: Interscience Publishers, 1962. — 360 p.
2. Bellman R. E. Dynamic Programming. — Princeton: Princeton University Press, 1957. — 342 p.
3. Bryson A. E., Ho Y.-C. Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. — Washington: Hemisphere Publishing, 1975. — 481 p.
4. Lee E. B., Markus L. Foundations of Optimal Control Theory. — New York: John Wiley & Sons, 1967. — 576 p.
5. Kirk D. E. Optimal Control Theory: An Introduction. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970. — 452 p.
6. Gelfand I. M., Fomin S. V. Calculus of Variations. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963. — 232 p.
7. Sethi S. P., Thompson G. L. Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, 2nd edition. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 504 p.
8. Taha H. A. Operations Research: An Introduction, 9th edition. — Upper Saddle River: Pearson Education, 2010. — 813 p.
9. Mamadaliyev N., Tuxtasinov M. Variatsion hisob va optimal boshqaruvning asosiy masalalari. — Toshkent: Universitet, 2013. — 188 b.
10. Kamien M. I., Schwartz N. L. Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, 2nd edition. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — 377 p.