ANIQ INTEGRALNING AMALIY TADBIQLARI

Sohibov Azizbek Dilshod o`g`li
Toshkent davlat iqtisodiyot universiseti
Buxgalteriya hisobi fakulteti talabasi.
Ilmiy rahbar: ***Xursandov Komiljon Maxmatkulovich***
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti
iqtisodiyot fanlari nomzodi v. b. dotsent, PhD.

Matematik taxlil oliy matematikaning dastlabki va ayni vaqtda asosiy bo'limi bo'lib hisoblanadi. Matematika fanining tobora intensiv rivojlanishi, yangi tushunchalar, yangi g'oyalar bilan boyib borishi bilan uning fan va texnikaning turli sohalariga tadbiq doirasi kengayib bormoqda, matematika inson faoliyatining barcha sohalariga kirib bormoqda. Matematik tahlil metodlarini bilmay turib tabiatda sodir bo'layotgan jarayonlarni, tabiiy fanlar va texnikaviy adabiyotlarda ko'rilayotgan masalalarni tushunib yetish qiyindir. Ammo aniq integralning amaliy tatbiqlari bu bilan chegaralanib qolmasdan, bulardan tashqari uning yordamida yana juda ko'p masalalar o'z yechimini topadi.

Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash. Bizga ma'lumki, $y = f(x) \geq 0$ funksiya grafigi, $x = \mathrm{a}$ va $x = \mathrm{b}$ vertikal to'g'ri chiziqlar hamda $y = 0$, ya'ni OX koordinata o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral orqali

$$S=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulani umumiyroq hollarda qaraymiz.

Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiya OX o'qidan pastda joylashgan va aniq integral qiymati manfiy son bo'ladi. Shu sababli bu holda egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \tag{2}$$

formula orqali topiladi.

Aniq integralning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. Aniq integral tushunchasi kiritilayotganda , o'zgaruvchan mehnat unumdorligi bo'yicha mahsulot hajmini aniqlash masalasini ko'rgan edik. Masalan, korxonada mehnat unumdorligi har bir ish kuni davomida

$$z = f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$$

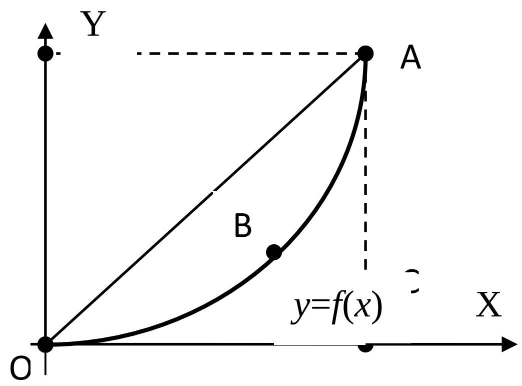
funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $0 \le t \le 8$ bo‘lib, t vaqtni soatda ifodalaydi. Bu korxonaning yil (258 ish kuni) davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmini topamiz:

$$Q = 258\int_0^8 (-0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96)dt = 258 \cdot (-0{,}0011t^3 - 0{,}0445t^2 + 20{,}96t)\Big|_0^8 =$$

$$= 258 \cdot (-0{,}5632 - 2{,}848 + 167{,}68) = 258 \cdot 164{,}2688 = 42381{,}3504$$

Demak, bu korxona bir yilda 42381 dona mahsulot ishlab chiqaradi. Biz bu yerda yana bir qator iqtisodiy masalalarni aniq integral yordamida yechilishi bilan tanishamiz.

Djini koeffitsiyentini hisoblash masalasi. Aholi o‘rtasida daromadni qanchalik darajada notekis taqsimlanganligini ifodalovchi y=f(x), $x \in [0,1]$, funksiyani qaraymiz (keyingi betdagi 1-rasmga qarang). Bunda y – daromad ulushini, x – aholi ulushini belgilaydi.



1-rasm

Bu funksiya grafigini ifodalovchi OBA egri Lorents egri chizig‘i deyiladi.

Daromad aholi o‘rtasida tekis taqsimlangan holda y=x bo‘ladi va bunda Lorents egri chizig‘i bissektrisadagi OA kesmaga aylanadi. Shu sababli har qanday $x \in [0,1]$ uchun $0 \le f(x) \le x$ qo‘sh tengsizlik bajariladi. Bunda OABO geometrik shakl yuzasi qanchalik katta bo‘lsa, daromadni notekis taqsimlanish darajasi ham shunchalik katta bo‘ladi. Shu sababli aholi o‘rtasida daromadni notekis taqsimotini o‘lchovi sifatida OABO shakl yuzasini OAC uchburchak yuzasiga nisbati olinadi. Bu nisbat D… koeffitsiyenti deb ataladi va k orqali belgilanadi. Bu yerda yuzalarni aniq integra… ali ifodalab, Djini koeffitsiyenti uchun quyidagi formulani hosil etamiz:

$$k = \frac{S_{OABO}}{S_{OAC}} = \frac{\int_0^1 [x - f(x)]dx}{\int_0^1 x dx} = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx$$

Masalan, Lorents egri chizig‘i y=x/(3–2x), $x \in [0,1]$, funksiya bilan berilgan holda Djini koeffitsiyentini (11) formula bo‘yicha hisoblaymiz:

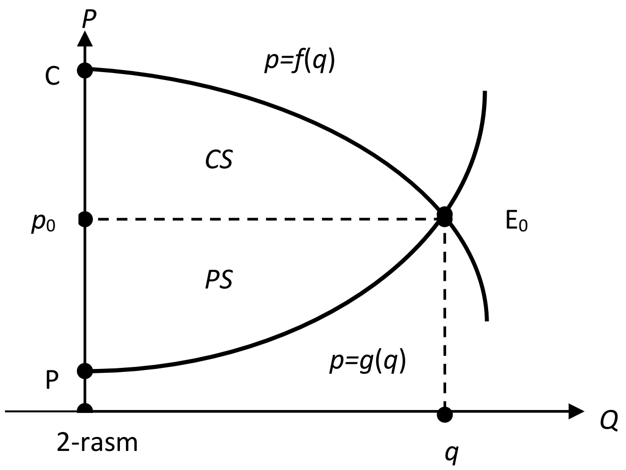
$$k = 2\int_0^1 (x - \frac{x}{3-2x})dx = 2\int_0^1 (x + \frac{x - 1{,}5 + 1{,}5}{2x-3})dx = 2\int_0^1 (x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x-3})dx =$$

$$= 2(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \cdot \ln|2x-3|)\Big|_0^1 = 2(1 - \frac{3}{4} \cdot \ln 3) \approx 0{,}352$$

Iste'molchi va ishlab chiqaruvchining yutuqlari masalasi. Dastlab talab va taklif funksiyalari tushunchalarini kiritamiz.

Mahsulot birligining narxi *p* va shu mahsulotni iste'molchi tomonidan xarid qilinish halmi *q* orasidagi bog'lanishni ifodalovchi p=f(q) funksiya talab funksiyasi deb ataladi. Iqtisodiyotda narx p, hajm (miqdor) q harfi bilan belgilanadi va shu sababli talab funksiyasi an'anaviy *y=f(x)* ko'rinishda yozilmasdan, *p=f(q)* ko'rinishda yozildi (2-rasmga qarang).

Mazmuniga asosan bu funksiya kamayuvchi bo'ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni xarid qilish hajmi q kamayadi (yuqoridagi chizmaga qarang).



2-rasm

Mahsulot birligining narxi p va shu mahsulotni ishlab chiqarilish hajmi q orasidagi bog'lanishni ifodalovchi p=g(q) funksiya taklif funksiyasi deb ataladi. Mazmuniga asosan bu funksiya o'suvchi bo'ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni ishlab chiqarish hajmi q oshadi (yuqoridagi chizmaga qarang).

Talab va taklif funksiyalarning grafiklari qandaydir bir E0(q0,p0) nuqtada kesishadi. Bu nuqtada iste'molchining talabi hajmi va ishlab chiqaruvchining taklif hajmi o'zaro teng bo'ladi. Bunday holat bozor muvozanati deb ataladi. Bozor muvozanatini keltirib chiqaruvchi mahsulot hajmi q0 va narxi p0 qiymatlari berilgan talab va taklif funksiyalari bo'yicha

$$\begin{cases} f(q) = p \\ g(q) = p \end{cases}$$ (4)tenglamalar sistemasidan topiladi.

Bozor muvozanati shartida iste'molchilar o'zlarining q_0 hajmdagi talablarini qondirishlari uchun mahsulot birligining p_0 narxda xarid qilib, jami $p_0\, q_0$ miqdorda xarajat qilishlari mumkin. Ammo bir qism iste'molchilar u yoki bu sabablar bo'yicha mahsulot xarid qilishni bozor muvozanati erishiladigan vaqtgacha kutib o'tira olmaydilar. Bundan tashqari ishlab chiqaruvchi ham o'z mahsulotini iloji boricha p_0 narxdan yuqoriroq bahoda sotishga harakat qiladi. Shu sababli iste'molchi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni ishlab chiqaruvchi bozorga birdaniga chiqarmasdan va uning hammasini birdaniga p_0 narxda sotmasdan, u o'z mahsulotini Δq_i $(i=1,2,3,\cdots, n)$ hajmdagi kichik-kichik partiyalarda bozorga chiqarib, uni $f(q_i) > p_0$ narxda sotadi. Natijada iste'molchi o'ziga kerak bo'lgan q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun $p_0\, q_0$ miqdorda xarajat qilish o'rniga

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(q_i)\Delta q_i$$

miqdor xarajat qiladi. Mahsulot ishlab chiqarish va uni xarid qilish jarayonlari uzluksiz ravishda ro‘y berib turadi. Shu sababli *f(x)* talab funksiyasini uzluksiz va mahsulotni kichik-kichik Δqi hajmli partiyalar soni n→∞ deb olish mumkin. Bu holda , aniq integral ta’rifiga asosan, iste’molchining q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun qilgan xarajatining asl qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(q_i)\Delta q_i = \int_0^{q_0} f(q)dq$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, agar iste’molchi o‘zi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 bozor muvozanati narxida xarid qilganda, uning xarajatlari

$$CS = S - p_0q_0 = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0q_0 = \int_0^{q_0}[f(q) - p_0]dq$$

miqdorda kam bo‘lar edi. Shu sababli CS iste’molchining yutug‘i , ba’zan esa iste’molchining ortiqcha xarajati deb yuritiladi. Yuqoridagi 2-rasmda bu ko‘rsatkich p_0 E0C egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Xuddi shundek, ishlab chiqaruvchi bozor muvozanatida o‘zi taklif etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 narxda sotganda p_0q_0 miqdordagi pul mablag‘iga ega bo‘lar edi. Ammo u bozor muvozanati bo‘lishini kutib o‘tirmasdan, Δqi hajmda (i=1,2,3,···, n) ishlab chiqargan mahsulotini darhol bozorga chiqarib, uning har birligini $g(q_i)<p_0$ narxda sotadi. Natijada ishlab chiqaruvchining q_0 hajmdagi mahsulotni sotish orqali erishgan asl pul mablag‘i quyidagicha bo‘ladi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(g) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(q_i)\Delta q_i = \int_0^{q_0} g(q)dq < p_0q_0 .$$

Shunday qilib, ishlab chiqaruvchi o‘z mahsulotini bozor muvozanati shartida

$$PS = p_0q_0 - \int_0^{q_0} g(q)dq = \int_0^{q_0}[p_0 - g(q)]dq$$

sotganda qoshimcha pul mablag‘iga ega bo‘lar edi. Shu sababli PS ishlab chiqaruvchining yutug‘i deb ataladi. Yuqoridagi 2-rasmda bu ko‘rsatkich P p_0E_0 egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Masalan,talab funksiya $p=f(q)=240–q^2$, taklif funksiya esa $p=g(q)=q^2+2q+20$ ko‘rinishda bo‘lganda iste’molchi va ishlab chiqaruvchi yutuqlarini aniqlaymiz. Buning uchun dastlab ushbu tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} p = 240 - q^2 \\ p = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ 240 - q^2 = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ q^2 + q - 110 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 140 \\ q_0 = 10 \end{cases}$$

Demak, bozor muvozanati narxi $p_0=140$, hajmi esa $q_0=10$ bo‘ladi. Unda, (6) formulaga asosan, iste’molchining yutug‘i

$$CS=\int_0^{q_0}[f(q)-p_0]dq=\int_0^{10}[240-q^2-140]dq=(100q-\frac{q^3}{3})\Big|_0^{10}=666,(6)\approx 667$$
,

ishlab chiqaruvchining yutug‘i esa, (7) formulaga asosan,

$$PS=\int_0^{q_0}[p_0-g(q)]dq=\int_0^{10}[120-q^2-2q]dq=(120q-\frac{q^3}{3}-q^2)\Big|_0^{10}=766,(6)\approx 767$$

XULOSA

Xulosa Aniq integral tushunchasi nafaqat matematik tahlilning muhim qismi, balki uning amaliy tatbiqlari orqali ham turli sohalarda muhim rol o‘ynaydi. Ushbu ishda aniq integral yordamida: Geometrik shakllarning yuzasini hisoblash, Iqtisodiy jarayonlarda mahsulot hajmi va daromad taqsimotini tahlil qilish, Djini koeffitsiyenti orqali jamiyatdagi daromad notekisligini baholash, Iste’molchi va ishlab chiqaruvchining yutuqlarini aniqlash kabi masalalar ko‘rib chiqildi. Har bir mavzu aniq misollar bilan yoritilgan va integralning iqtisodiy hamda geometrik sohalarda qanday qo‘llanishi batafsil tahlil qilingan.

Adabiyotlar

1. G.Fixtengolts “Matematik analiz asoslari”. I, II tom – Toshkent O’qituvchi 1970
2. T.A.Azlarov, X.Mansurov. “Matematika analiz”. 1-qism. T. ,O’qituvchi 1986
3. T.A.Azlarov, X.Mansurov. “Matematika analiz”. 2 – qism. T. , O’qituvchi 1989
4. S.Kudaybergenov. Matematik analiz kursi. – Toshkent, Fan, 2003.
5. R.Karimov, S.To‘laganov. Matematika va uning amaliy tatbiqlari. – Toshkent, Universitet, 2015.
6. Larson, R., Edwards, B.H. Calculus. – Cengage Learning, 2014.