

TRAPETSIYAGA DOIR BA'ZI TEOREMLARNI ISBOTLASH

Jurayev Furqat Muhtidinovich

Buxoro Davlat Universiteti Differensial tenglamalari
kafedrası kata o'qituvchisi Email: fjm1980@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada o'rta maktab o'tiladigan "Trapetsiya" mavzusini o'quvchilarga tushuntirishda trapetsiya elementlari orasidagi munosabatlarni aniqlashning yangicha usullari tavsiya etilgan. Jumladan, trapetsiyaning tomonlari, diagonallari va balandligi orasidagi munosabatlar umumiy hollarda ko'rsatiladi va olingan asosiy natijalar isbotlanib, matematik formulalar bilan mustahkamlanadi.

Annotation. This article proposes new methods for explaining the topic of "Trapezium" to students in high school. In particular, the relationships between the sides, diagonals, and height of a trapezoid are shown in general cases, and the main results obtained are proven and supported by mathematical formulas.

Kalit so'zlar: trapetsiya, tomonlar, asoslar, diagonallar, uchburchak, parametrlar, balandlik, proyeksiya, yuza, burchaklar, nisbatlar, isbot, formulalar.

Key words: trapezoid, sides, bases, diagonals, triangle, parameters, height, projection, area, angles, ratios, proof, formulas.

Ma'lumki, trapetsiya geometriyaning asosiy mavzularidan biri bo'lgani sababli o'quvchilarga uni sodda tushuntirish uchun uning elementlari orasidagi bog'lanishlar haqida ma'lumot berish maqsadi qo'yildi. Ba'zi teoremlar ma'lum bo'lsa-da, ulardan kelib chiqadigan natijalarga yangicha yondashilgan, ayrim yangi tushunchalar soddalik maqsadida kiritilgan. Bu o'quvchiga mavzuni tushunishda yengillik yaratadi desak mubolag'a bo'lmaydi.

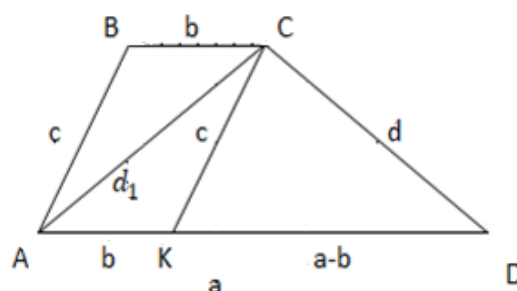
TEOREMA 1. Trapetsiyaning diagonallari kvadratlarining yig'indisi uning yon tomonlari kvadratlari va asoslari ko'paytmasi ikkilanganini yig'indisiga teng:

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab \quad (1)$$

bunda d_1, d_2 -trapetsiya diagonallari, a, b -trapetsiyaning asoslari, c, d -trapetsiyaning yon tomonlari.

Isbot. Asoslari $AD=a$, $BC=b$ va diagonallari $AC=d_1$, $BD=d_2$ bo'lgan $AB=c$, $CD=d$ yon tomonlarga ega $ABCD$ trapetsiyani qaraylik.

Dastlab AC diagonalni o'tkazamiz. Bunda $ABCD$ trapetsiya $\triangle ABC$ va $\triangle ACD$ uchburchaklarga ajraladi. Trapetsiyaning C uchidan AB yon tomonga parallel qilib CK to'g'ri chiziqli o'tkazamiz. Natijada $ABCK$ parallelogramm hosil bo'ladi va parallelogramm xossasiga ko'ra $AK=b$, $CK=c$. Bundan $DK=a-b$



bo'ladi. $\angle AKC = \alpha$ deb olinsa, unga qo'shni burchak $\angle CKD = 180^\circ - \alpha$ bo'ladi. Endi $\triangle ACK$ va $\triangle CKD$ uchun kosinuslar teoremasini qo'llaymiz:

$$d_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$d^2 = c^2 + (a-b)^2 - 2c(a-b) \cos(180^\circ - \alpha) \text{ yoki}$$

$$d^2 = c^2 + (a-b)^2 + 2c(a-b) \cos \alpha$$

Bu tengliklarning har biridan $\cos \alpha$ ni topib tenglashtiramiz. Ya'ni

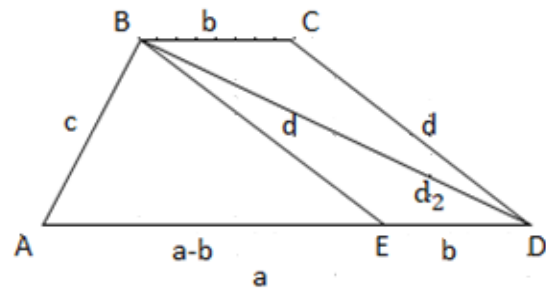
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - d_1^2}{2bc}, \quad \cos \alpha = \frac{d^2 - c^2 - (a-b)^2}{2c(a-b)}$$

$$\frac{b^2 + c^2 - d_1^2}{2bc} = \frac{d^2 - c^2 - (a-b)^2}{2c(a-b)} \text{ yoki } \frac{b^2 + c^2 - d_1^2}{b} = \frac{d^2 - c^2 - (a-b)^2}{a-b}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan

$$d_1^2 = \frac{ab(a-b) + ac^2 - bd^2}{a-b}, \quad d_1 = \sqrt{\frac{ab(a-b) + ac^2 - bd^2}{a-b}} \quad (2)$$

d_1 -diagonalni topamiz. Yuqoridagiga o'xshash ABCD trapetsiyada CD yon tomonga parallel qilib BE to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Natijada EBCD parallelogramm hosil bo'ladi va parallelogramm xossasiga asosan $ED=b$, $BE=d$, $AE=a-b$ bo'ladi. Bunda $\angle AEB = \beta$ deb olinsa, unga qo'shni burchak



$\angle BED = 180^\circ - \beta$ bo'ladi. Xuddi yuqoridagi kabi $\triangle AEB$ va $\triangle BED$ uchun kosinuslar teoremasini qo'llab, ikkinchi diagonalni topamiz:

$$d_2^2 = \frac{ab(a-b) + ad^2 - bc^2}{a-b}, \quad d_2 = \sqrt{\frac{ab(a-b) + ad^2 - bc^2}{a-b}} \quad (3)$$

(2) va (3) ixtiyoriy trapetsiyaning diagonalini topish formulasidir. (2) va (3) ni hadma-had qo'shish natijasida quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab.$$

Teorema 1 isbotlandi.

TEOREMA 2. Trapetsiya yon tomonining asosidagi proyeksiyalari quyidagicha ifodalanadi. Ya'ni

$$x = \frac{a-b}{2} + \frac{c^2 - d^2}{2(a-b)} \quad (4)$$

$$y = \frac{a-b}{2} + \frac{d^2 - c^2}{2(a-b)} \quad (5)$$

bunda $a; b$ -trapetsiyaning asoslari, $c; d$ -trapetsiyaning yon tomonlari, $x; y$ -trapetsiya yon tomonlarining asosidagi proyeksiyalari.

Isbot. Shaklga ko'ra $BC=MN=b$, $AB=c$, $CD=d$, $MA=x$, $ND=y$, $BM=CN=h$, $BD=d_2$. Bunda h-trapetsiyaning balandligi, $b+x+y=a$ tenglik o'rinli. Trapetsiyaning BM balandligi $\triangle ABD$ ni $\triangle BMA$ va $\triangle BMD$ uchburchaklarga ajratadi. Bu uchburchaklar uchun pifagor teoremasini qo'llaymiz va har bir

tenglikdan h ni topib tenglashtiramiz:

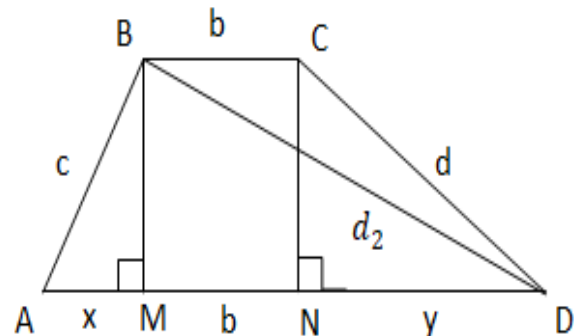
$$h^2 = c^2 - x^2, \quad h^2 = d_2^2 - (a - x)^2$$

$$d_2^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2, \quad x = \frac{c^2 + a^2 - d_2^2}{2a}$$

(3) formula asosan

$$x = \frac{c^2 + a^2 - \frac{ab(a-b) + ad^2 - bc^2}{(a-b)}}{2a} \quad \text{yoki} \quad x = \frac{c^2 - d^2 + (a-b)^2}{2(a-b)}$$

munosabatni hosil qilamiz.



Endi $b + x + y = a$ tenglikdan foydalanib, y ni topamiz: $y = \frac{d^2 - c^2 + (a-b)^2}{2(a-b)}$.

Teorema 2 isbotlandi.

TEOREMA 3. Tapetsiyaning asoslari, yon tomonlarining asosidagi proyeksiyalari va dioganallari orasidagi munosabat quyidagi tenglik bilan ifodalanadi:

$$d_1^2 - d_2^2 = (a + b)(x - y) \quad (6)$$

Isbot. (2) va (3) ni hadma-had ayirish natijasida quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$d_1^2 - d_2^2 = (a + b) \left(\frac{c^2 - d^2}{a - b} \right)$$

$x - y = \frac{c^2 - d^2}{a - b}$ tenglikdan foydalanib ushbu munosabatni hosil qilamiz: $d_1^2 - d_2^2 = (a + b)(x - y)$. **Teorema 3 isbotlandi.**

3. Trapetsiy tomonlari va uning yuzasi orasidagi munosabat.

TEOREMA 4. Tomonlari a, b va yon tomonlari c, d bo'lgan ixtiyoriy trapetsiyaning yuzi quyidagi formula bilan ifodalanadi. Yani

$$S = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(P-a)(P-b)(P-(b+c))(P-(b+d))}, \text{ bunda } P = \frac{a+b+c+d}{2}. \quad (7)$$

Isbot. Ma'lumki trapetsiyanı yuzı $S = \frac{a+b}{2} h$ formula bilan topiladi. **Natija 2** ga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S = \frac{a+b}{2} \frac{2}{a-b} \sqrt{(P-a)(P-b)(P-(b+c))(P-(b+d))} \text{ yoki}$$

$$S = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(P-a)(P-b)(P-(b+c))(P-(b+d))}, \text{ bunda } P = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Teorema 4 isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. A.A.Rahimqoriyev, M.A.Toxtaxodjayeva. Geometriya 8. Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 8-sinfi uchun darslik. Toshkent "O'zbekiston" 2019.

2. H.M.Sayfullayeva. Geometriya. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma. Toshkent "O'qituvchi" 2003.
3. I.Israilov, Z.Pashayev. Geometriyadan masalalar to'plami. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma. Toshkent "O'qituvchi" 2003.