O’RIN ALMASHTIRISHLAR VA O’RNIGA QO’YISHLAR TADBIQI

Beshimova Shaxnoza
Buxoro Davlat Universiteti Differensial tenglamalari kafedrasi o‘qituvchisi

Annotatsiya. Mazkur uslubiy matn kombinatorika va oliy algebraning fundamental bo‘limlaridan biri — **o‘rin almashtirishlar** va **o‘rniga qo‘yishlar** nazariyasiga bag‘ishlangan. Unda mavzuga oid asosiy matematik tushunchalar, qoidalar va ularning xossalari sodda va tushunarli tilda bayon etilgan.

Annotation. This methodological text is dedicated to the theory of permutations and substitutions, one of the fundamental branches of combinatorics and higher algebra. It explains the core mathematical concepts, rules, and their properties related to the topic in a simple and understandable language.

Kalit so’zlar: O‘rin almashtirish, o‘rniga qo‘yish, inversiya, transpozitsiya, sikl, dekrement, faktorial, juft va toq almashtirishlar.

Key words: Permutation, substitution, inversion, transposition, cycle, decrement, factorial, even and odd permutations.

O’rin almashtirishlar va o’rniga qo’yishlar

n ta 1, 2, .., *n* *sonlar* (yoki *n* ta har xil a_1, a_2, .., a_n *simvollar*) ning ma’lum tartibda mumkin bo’lgan ixtiyoriy joylashuviga shu sonlarning (yoki simvollarning) *o’rin almashtirishi* deyiladi. Berilgan *n* ta simvollarni 1, 2, ..., *n,* sonlar bilan tartiblash mumkin bo’lganligi sababli ixtiyoriy *n* ta simvollarning o’rin almashtirishlarini o’rganish 1, 2, ..., *n* larning o’rin almashtirishlarini o’rganishga keltiradi. *n* ta sonlarning barcha o’rin almashtirishlari soni $1\cdot2\cdot3\cdots n = n!$ («*n-faktorial*» deb o’qiladi) ga teng. Masalan, a_1, a_2, a_3 simvollarning barcha o’rin almashtirishlari quyidagilardir: $a_1\,a_2\,a_3$, $a_1\,a_3\,a_2$, $a_2\,a_1\,a_3$, $a_2\,a_3\,a_1$, $a_3\,a_1\,a_2$, $a_3\,a_2\,a_1$. Ularning soni 3! = 6 ta.

Agar o’rin almashtirishda ikki sondan kattasi kichigidan oldin kelsa bu sonlar *inversiyani* tashkil etadi, agar kichigi kattasidan oldin kelsa, *tartib* deyiladi.

Inversiyalar sonini hisoblash usuli: o’rin almashtirishdagi sonlarni yozilish tartibi bo’yicha (chapdan o’ngga) har bir son uchun undan o’ng tomonda turgan kichik sonlar sanaladi va hosil bo’lgan barcha sonlar qo’shiladi. Masalan, (613542) o’rin almashtirishda inversiyalar soni $5 + 1 + 2 + 1 = 9$ ga teng.

Inversiyalar sonining juft, toqligiga qarab o’rin almashtirish *juft* yoki *toq* deyiladi.

O’rin almashtirishdagi ikki sonni o’rnini almashtirish *transpozitsiya* deyiladi. *i* va *j* sonlarning transpozitsiyasi (*i*, *j*) bilan belgilanadi. *n* ta sonning har qanday o’rin almashtirishidan shu sonlarning istagan boshqa o’rin almashtirishiga bir nechta transpozitsiyalarni bajarish bilan kelish mumkin bo’lib, bunda *n*-1 tadan ko’p

bo'lmagan transpozitsiyalar bilan chegaralanishi mumkin. Misol. (312546) o'rin almashtirishdan (631254) almashtirishga beshta: (3, 6), (3, 1), (1, 2), (2, 5), (5, 4) transpozitsiyalarni bajarish bilan kelish mumkin.

1, 2, ... , *n* sonlarning barcha *n*! o'rin almashtirishlarni har keyingisi oldingisida bitta transpozitsiyani bajarishdan hosil bo'lgan qilib (tushirib qoldirmaydigan va takrorlanmaydigan), birin-ketin joylashtirish mumkin. Har bir transpozitsiya o'rin almashtirishning juft-toqligini o'zgartiradi. $n \geq 2$ son uchun *n* ta sondan tuzilgan o'rin almashtirishlardan juftlari soni toqlari soniga, ya'ni $\frac{1}{2}n!$ ga teng bo'ladi.

n ta 1, 2, ... , *n* sonlar to'plamining o'ziga o'zaro bir qiymatli akslantirishiga (biyeksiyasiga) bu sonlarning *o'rniga qo'yish* yoki *n-tartibli o'rniga qo'yish* deyiladi. Shunday qilib, o'rniga qo'yishda 1 dan *n* gacha bo'lgan har bir songa shu sonlardan qandaydir biri mos keltirilgan bo'lib, ikkita har xil songa ikkita har xil son mos keladi. O'rniga qo'yish umumiy qavsga olingan ikkita satr ko'rinishida: yuqori satrda turgan har bir sonning tagida unga mos keluvchi sonni yozish bilan ifodalanadi. Masalan, $\begin{pmatrix}623451\\436251\end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda $1 \to 1$,

$2 \to 3$, $3 \to 6$, $4 \to 2$, $5 \to 5$, $6 \to 4$ mos keltirilganligini bildiradi.

Sonlarning yuqori satrda joylashuviga qarab bitta o'rniga qo'yishni bir nechta ko'rinishda yozish mumkin. Masalan,

$$\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2134\\4312\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3124\\1342\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4123\\2341\end{pmatrix}$$

o'rniga qo'yishlarning barchasida 1 soni 3 ga, 2 soni 4 ga, 3 soni 1 ga, 4 soni 2 ga o'tganligi sababli, ular aynan bitta o'rniga qo'yishni ifodalaydi. *n* ta son yordamida tuzilgan har bir o'rniga qo'yishni *n*! har xil ko'rinishlarda yozish mumkin. *n* ta sondan tuzilgan har xil o'rniga qo'yishlar soni ham *n*! ga tengdir.

Agar o'rniga qo'yishning ikkala satridagi inversiyalar yig'indisi juft bo'lsa, o'rniga qo'yish *juft* deb, agar inversiyalar yig'indisi toq bo'lsa, *toq* deb aytiladi. Demak, agar ikkala satrdagi inversiyalar bir xilda juft, yoki ikkalasi ham toq bo'lsa, o'rniga qo'yish juft, agar har xil bo'lsa o'rniga qo'yish toq bo'ladi. O'rniga qo'yishning juft-toqligi uning ikkita satr yordamida ko'rinishidan bog'liq emas, ya'ni bitta o'rniga qo'yishning har xil ko'rinishida inversiyalar juft-toqligi bir xildir. Masalan, $\begin{pmatrix}3214\\1324\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishning birinchi yozuvida to'rtta, ikkinchisida ikkita inversiya bor, ya'ni juft.

n elementdan tuzilgan juft o'rniga qo'yishlar soni toq o'rniga qo'yishlar soniga va demak, $\frac{1}{2}n!$ ga tengdir ($n \geq 2$).

O’rniga qo’yishning juft-toqligini aniqlashning boshqa usuli ham bor. Bir nechta sonlar ketma-ketligida berilgan o’rniga qo’yishda birinchi son - ikkinchisiga, ikinchisi - uchinchisiga va h.k oxirgisi - birinchisiga o’tsa, bu sonlar *sikl* deb ataladi. Siklni undagi sonlarni umumiy qavslarga olib yozish bilan belgilanadi. Agarda son yana o’ziga o’tsa, u ham bitta siklni tashkil etadi. Umumiy sonlarga ega bo’lmagan sikllar, *o’zaro bog’liq bo’lmagan sikllar* deyiladi. Har qanday o’rniga qo’yishni o’zaro bog’liq bo’lmagan sikllarga ajratish mumkin (yoki yoyish mumkin). Masalan, $\begin{pmatrix}123456\\613542\end{pmatrix}=(162)(45)(3)$.

O’rniga qo’yishdagi elementlar soni n va uning yoyilmasidagi sikllar soni k ning ayirmasi bo’lgan d soniga, ya’ni $d = n - k$ ga *o’rniga qo’yishning dekrementi* deyiladi. O’rniga qo’yishning juft-toqligi uning dekrementining juft-toqligi bilan bir xildir. Masalan: $n = 6, k = 3, d = 3$ bo’lib, o’rniga qo’yish toq.

n-tartibli ikkita o’rniga qo’yishni ketma-ket bajarishdan hosil bo’lgan o’rniga qo’yishga ularning *ko’paytmasi* deyiladi. Masalan, agar $a=\begin{pmatrix}12345\\31254\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}12345\\25314\end{pmatrix}$, bo’lsa, u holda $ab=\begin{pmatrix}12345\\32541\end{pmatrix}$ bo’ladi.

Agar siklni o’rniga qo’yish deb tushunsak, u holda o’rniga qo’yishni o’zaro bog’liq bo’lmagan sikllarga yoyilmasiga uning shu sikllarning ko’paytmasi ko’rinishidagi ifodasi deb qarash mumkin. Agar 1, 2, ..., n, sonlarning o’rniga qo’yishda i_1 son i_2 *ga*, $i_2 \to i_3$ ga ,... $i_{k-1} \to i_k$ ga ($k \le n$), $i_k \to i_1$ ga o’tib, qolgan sonlar o’ziga o’tsa, bunday o’rniga qo’yishga *sikl* yoki *siklik o’rniga qo’yish* deyiladi va $(i_1, i_2, ..., i_k)$ ko’rinishida belgilanadi. $(i_1, i_2, ..., i_k)$ va masalan, $(i_2, i_3, ..., i_k, i_1)$ sikllar o’zaro tengdir. k songa *siklning uzunligi* deyiladi.

Uzunligi 1 ga teng sikl ko’paytmada yozilmaydi. Masalan, $\begin{pmatrix}12345678\\82157463\end{pmatrix}=(183)(4576)$. Uzunligi ikkiga teng sikl *transpozitsiya* deyiladi. Har qanday o’rniga qo’yishni transpozitsiyalar ko’paytmasi shaklida ifodalash mumkin. Masalan, $(i_1, i_2, ..., i_k) = (i_1, i_2)\ (i_1, i_3)\ ...\ (i_1, i_k)$. Bu ifodalanish yagona emas, har qanday juft o’rniga qo’yishni juft sondagi transpozitsiyalar, toq o’rniga qo’yishni toq sondagi transpozitsiyalar ko’paytmasi ko’rinishida ifodalash mumkin.

1-m i s o l. Agar RPOKUTME harfli o’rin almashtirishni tartib deb qarab, unga nisbatan KOMPUTER o’rin almashtirishining juft yoki toqligini aniqlang.

Yechish. K harfi O, P, R harflari bilan 3 inversiyani tashkil qiladi. O harfi P, R bilan 2 inversiyani, M harfi P, U, T, R harflari bilan 4 ta inversiyani, P harfi R harfi bilan 1 inversiyani, U harfi R bilan 1 inversiyani, U harfi R bilan 1 inversiyani, T harfi R bilan 1 inversiyani, E harfi R bilan 1 inversiyanm hosil qiladi. Hammasi bo’lib

KOMPUTER o'rin almashtirishida 14 ta inversiya bor. Demak, bu o'rin almashtirish juft. ■

2-m i s o l. (2*n*, 2*n*-2, ..., 6, 4, 2, 2*n*-1, 2*n*-3, ..., 5, 3, 1) (1)
o'rin almashtirishida inversiyalar sonini toping. O'rin almashtirishi juft bo'ladigan *n* larning, va toq bo'ladigan *n* larning umumiy ko'rinishini ko'rsating.

Yechish. Inversiyalar sonini hisoblaymiz:

$$(2n-1)+(2n-3)+\ldots+5+3+1+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=$$
$$\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n+\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=n^2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

bundan $n = 4k$ va $n = 4k + 3$ bo'lgandagina (1) o'rin almashtirish juft bo'lishini ko'ramiz.■

3-m i s o l. (9, 5, 1, 8, 3, 7, 4, 6, 2) o'rin almashtirishdan (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) o'rin almashtirishga o'tish mumkin bo'lgan transpozitsiyalarni ko'rsating.

Yechish. Bu transpozitsiyalar quyidagilardan iboratligini ko'rish qiyin emas. (5, 8), (1, 7), (5, 6), (3, 5), (1, 4), (1, 3), (2, 1). ■

4-m i s o l. *n* ta 1, 2, ..., *n* sonlarning (1 2 ... *n*) o'rin almashtirishidan farqli har qanday o'rin almashtirishida ma'lum bir transpozitsiya bajarish bilan undagi inversiyalar sonini bittaga kamaytirish mumkinligini ko'rsating.

Yechish. Qaraladigan o'rin almashtirishda kamida bitta α_k, α_{k+1}, $(\alpha_k > \alpha_{k+1})$ juftlik topiladi. (α_k, α_{k+1}) transpozitsiya inversiyalar sonini bittaga kamaytiradi. ■

5-m i s o l. Quyidagi o'rin almashtirishni sikllar ko'paytmasiga yoying va dekrement orqali juft-toqligini aniqlang

$$\begin{pmatrix} 1234....2n-1 & 2n \\ 2143....2n & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Berilgan o'rniga qo'yishni o'zaro bog'liq bo'lmagan
(1 2) (3 4) .... (2*n*-1, 2*n*) sikllarning ko'paytmasi ko'rinishida yoyish mumkin. Demak, uning dekrementi $2n - n = n$ ga teng bo'lib, o'rniga qo'yishning juft-toqligi *n* ning juft-toqligi bilan bir xildir. ■

6-m i s o l. (3 2 1) (6 5 4) .... (3*n*, 3*n*-1, 3*n*-2) o'rniga qo'yishda sikllardagi yozuvdan ikki satrlardagi yozuvga o'ting.

Yechish. Birinchi sikldan 1 ning 3 ga, 3 ning 2 ga, 2 ning 1 ga o'tishini ko'ramiz. Ikkinchi siklda 4 – 6 ga, 6 – 5 ga, 5 – 4 ga o'tadi. Oxirgi siklda
$3n \to 3n\text{-}1$ ga, $3n\text{-}1 \to 3n\text{-}2$ ga, $3n\text{-}2$ esa $3n$ *ga* o'tadi. Natijada, biz quyidagi $\begin{pmatrix} 123456....3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 312645....3n & 3n-2 & 3n-1 \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishni hosil qilamiz. ■

7-m i s o l. Hisoblang:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\\ \beta_1\beta_2...\beta_n\end{pmatrix}^{-2}(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\\ \beta_1\beta_2...\beta_n\end{pmatrix}.$$

Yechish.

$$\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2...\beta_n\\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\\ \alpha_2\alpha_3...\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\\ \beta_1\beta_2...\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2...\beta_n\\ \alpha_2\alpha_3...\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\\ \beta_1\beta_2...\beta_n\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\beta_2...\beta_n\\ \beta_2\beta_3...\beta_1\end{pmatrix}=(\beta_1\beta_2...\beta_n).\blacksquare$$

8-m i s o l. Agar

$$A=\begin{pmatrix}12345\\ 31254\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}12345\\ 42135\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}12345\\ 53124\end{pmatrix}$$

bo'lsa, $A^{-1}XB = C$ tenglikdan X o'rniga qo'yishni toping.

Yechish. $A^{-1}XB = C$ tenglikni chapdan A ga, o'ngdan B^{-1} ga ko'paytirsak, $X=ACB^{-1}$ ni topgan bo'lamiz.

$B^{-1}=\begin{pmatrix}12345\\ 32415\end{pmatrix}$ bo'lganligi sababli,

$X=\begin{pmatrix}12345\\ 31254\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12345\\ 53124\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12345\\ 32415\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12345\\ 35412\end{pmatrix}$ ni hosil qilamiz. ■

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev Chiziqli algebra . Darslik 2023 y.
2. А. С. Мищенко, Эрмитова K-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа, УМН, 1976, том 31
3. С. П. Новиков , Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов Z-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонового формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I, Изв. АН, сер. матем.