

KVADRATIK FORMALARLARNING AMALIY TADBIQLARI

Mamatova Nilufar Husenovna
Buxoro Davlat Universiteti Differensial
tenglamalari kafedrası Dotsenti

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko'p o'lchovli fazolarda chiziqli algebra va matematik analizning muhim tarkibiy qismi bo'lgan kvadratik formalar tushunchasi tadqiq etilgan. Maqolada kvadratik formalarining simmetrik matritsalar orqali ifodalanishi, chiziqli almashtirishlar ta'sirida ularning o'zgarishi va kanonik ko'rinishga keltirilishi bayon etilgan. Shuningdek, kvadratik formalarining musbat va manfiy aniqlanganlik shartlari hamda ularni tekshirishda Silvestr mezonining (teoremasining) qo'llanilishi tahlil qilingan. Tizimli tahlillar asosida inersiya qonunining matematik mohiyati yoritib berilgan.

Kalit so'zlar: Kvadratik forma, simmetrik matritsa, chiziqli almashtirma, kanonik ko'rinish, inersiya qonuni, bosh minorlar, Silvestr teoremasi, musbat aniqlanganlik.

KIRISH

Turli nazariy va amaliy mazmundagi iqtisodiy, fizik va muhandislik masalalarini yechishda ko'p o'lchovli n o'lchovli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorning komponentalaridan tuzilgan ikkinchi darajali bir jinsli algebraik ifodalarni qarashga to'g'ri keladi. Matematik modellashirishda, ayniqsa ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning ekstremumlarini topishda, barqarorlik nazariyasida va mexanik tizimlar kinetik energiyasini hisoblashda kvadratik formalar apparati fundamental asos bo'lib xizmat qiladi.

Turli nazariy va amaliy mazmunli masalalarni yechishda n o'lchovli $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorning $x_i, i=1, 2, \dots, n$, komponentalaridan tuzilgan

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

ko'rinishdagi yig'indilarni qarashga to'g'ri keladi.

1-TA'RIF: (1) yig'indi $x_i, i=1, 2, \dots, n$, komponentalardan tuzilgan **kvadratik forma** deb ataladi. Unda $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ haqiqiy sonlar bo'lib, kvadratik formaning **koeffitsiyentlari**, ulardan hosil etilgan n -tartibli $A=(a_{ij})$ kvadrat matritsa **kvadratik formaning matritsasi** deyiladi.

(1) kvadratik formada $x_i x_j = x_j x_i$ bo'lgani uchun ular oldidagi koeffitsiyentlar uchun ham $a_{ij} = a_{ji}$ tenglik o'rinli deb olinadi va shu sababli $A=(a_{ij})$ simmetrik matritsa (II bob,

§1ga qarang) bo'lib, uning uchun $A=A^T$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda A^T berilgan A matritsaning transponirlanganligini ifodalaydi.

Masalan,

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 - 4x_2^2 = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2$$

kvadratik forma va uning matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

2-TA'RIF: Agar $A=(a_{ij})$ matritsaning rangi r bo'lsa, bu son (1) **kvadratik formaning rangi** deyiladi. $R=n$, ya'ni $\det A \neq 0$ holda kvadratik forma **maxsusmas** deb ataladi.

Matritsalarini ko'paytirish va transponirlash amallaridan foydalanib (1) kvadratik formani qisqacha

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda X orqali x_i , $i=1, 2, \dots, n$, komponentlardan tuzilgan ustun matritsa belgilangan.

Kvadratik formadagi x_i , $i=1, 2, \dots, n$, komponentalar ustida

$$x_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} y_k, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

chiziqli almashtirma bajarilib, yangi y_k , $k=1, 2, \dots, n$, komponentalarga o'tilgan bo'lsin. Bu chiziqli almashtirma matritsasini $C=(c_{ik})$ va y_k , $k=1, 2, \dots, n$, komponentalardan tuzilgan ustun matritsani Y kabi belgilaymiz. Bu holda (3) chiziqli almashtirmani $X=CY$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Kvadratik formaning (2) matritsaviy ko'rinishdagi yozuvidan va transponirlash amalining xossasidan (II bob, §1) foydalanib,

$$X^T A X = (CY)^T A (CY) = Y^T C^T A C Y = Y^T B Y \quad (4)$$

natijani olamiz. Bu yerda $B=C^T A C$ belgilash kiritilgan va B matritsa simmetrik bo'ladi. Haqiqatan ham, transponirlash amali xossalaridan va $A^T=A$ ekanligidan,

$$B^T = (C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C = B$$

tenglik kelib chiqadi va u B matritsaning simmetrikligini ko'rsatadi. Unda (4) tenglikni (2) bilan taqqoslab, quyidagi teorema o'rinli ekanligini ko'ramiz:

1-TEOREMA: Matritsasi A bo'lgan (1) kvadratik forma ustida C matritsali (3) chiziqli almashtirma bajarilsa, unda yangi y_k komponentlardan tuzilgan va matritsasi $C^T A C$ bo'lgan kvadratik forma hosil bo'ladi.

Masalan, $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ kvadratik formada

$$x_1 = 2y_1 + y_2, \quad x_2 = 4y_1 - 3y_2$$

chiziqli almashtirma bajarilganda hosil bo'ladigan yangi kvadratik formani topamiz. Bunda

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

ekanligidan

$$B = C^T A C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -22 \\ -22 & 44 \end{pmatrix}$$

natijani olamiz. Demak,

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 5(2y_1 + y_2)^2 - 4(2y_1 + y_2)(4y_1 - 3y_2) + 3(4y_1 - 3y_2)^2 = 36y_1^2 - 44y_1y_2 + 44y_2^2 = g(y_1, y_2).$$

Agar (3) chiziqli almashtirma maxsusmas, ya'ni $\det C \neq 0$ bo'lsa, unda A va $C^T A C$ matritsalarining ranglari o'zaro teng bo'lishini ko'rsatish mumkin. Demak, maxsusmas chiziqli almashtirma bajarilganda kvadratik formaning rangi o'zgarmay qoladi.

3-TA'RIF: Agar kvadratik formada faqat x_i , $i=1, 2, \dots, n$, komponentalarning kvadratlari qatnashgan, ya'ni

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 \quad (5)$$

ko'rinishda bo'lsa, (5) **kanonik** ko'rinishdagi kvadratik forma deyiladi.

Kanonik ko'rinishdagi kvadratik forma uchun $i \neq j$ holda $a_{ij}=0$, ya'ni uning A matritsasi diagonal matritsadan iborat bo'ladi.

2-TEOREMA: Har qanday (1) kvadratik formani biror maxsusmas (3) chiziqli almashtirma yordamida kanonik, ya'ni

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(y_1, y_2, \dots, y_n) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2 \quad (6)$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Bunda ayrim b_i koeffitsiyentlar nolga teng bo'lishi mumkin va noldan farqli koeffitsiyentlar soni kvadratik formaning r rangiga teng bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etib, uni ushbu misolda ko'rsatamiz:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1 \quad (7)$$

kvadratik formada

$$x_1 = 0.5y_1 + 0.5y_2 + 3y_3, \quad x_2 = 0.5y_1 - 0.5y_2 - y_3, \quad x_3 = y_3 \quad (8)$$

chiziqli almashtirma bajaramiz. Bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = -6 \neq 0, \quad C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 3 \\ 0.5 & -0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det C = -0.5 \neq 0$$

bo'lgani uchun (7) kvadratik formaning rangi $r=3$ va (8) chiziqli almashtirma maxsusmas bo'ladi. Demak, (7) kvadratik formaning kanonik ko'rinishida y_1, y_2 va y_3 kvadratlari qatnashishi kerak. Haqiqatan ham bu yerda

$$B = C^T A C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 3 \\ 0.5 & -0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

bo'lgani uchun (7) kvadratik formaning kanonik ko'rinishi quyidagicha ekanligini ko'ramiz:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1 = 0.5y_1^2 - 0.5y_2^2 + 6y_3^2 = g(y_1, y_2, y_3). \quad (9)$$

Kvadratik formaning topilgan (9) kanonik ko'rinishi yagona bo'lmasdan, uni turli chiziqli almashtirmalar yordamida turli kanonik ko'rinishlarga keltirish mumkin.

Masalan, ko'rib o'tilgan (7) kvadratik formani

$$x_1 = y_1 + 3y_2 + 2y_3, \quad x_2 = y_1 - y_2 - 2y_3, \quad x_3 = y_2$$

chiziqli almashtirma orqali (9) ko'rinishdan farqli bo'lgan

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1 = 2y_1^2 + 6y_2^2 - 8y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3) \quad (10)$$

kanonik ko'rinishga keltirilishini ko'rsatish mumkin. (7) kvadratik formaning (9) va (10) kanonik ko'rinishlari turlicha bo'lsada, ulardagi musbat va manfiy koeffitsiyentli hadlar soni bir xil, ya'ni mos ravishda ikki va bittadandir. Bu tasodifiy bo'lmasdan, quyidagi isbotsiz qabul qilinadigan teorema orqali ifodalanadigan **inersiya qonuni** o'rinli bo'ladi.

3-TEOREMA: Kvadratik formaning turli maxsusmas chiziqli almashtirmalar orqali hosil qilingan barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy ishorali hadlar soni bir xil bo'ladi.

Endi kvadratik formalarning muhim bir xususiy holini ko'rib o'tamiz.

4-TA'RIF: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma barcha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ nuqtalarda $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ($f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$) qiymatlar qabul etsa, u musbat (manfiy) aniqlangan deb ataladi.

Masalan,

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 \pm 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 2(x_1^2 \pm 2x_1x_2 + x_2^2) + x_1^2 = 2(x_1 \pm x_2)^2 + x_1^2 > 0 \quad (11)$$

musbat aniqlangan,

$$g(x_1, x_2) = -x_1^2 \pm 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -(x_1 \mp x_2)^2 - x_2^2 < 0 \quad (12)$$

esa manfiy aniqlangan kvadratik formalardir.

Berilgan kvadratik formani musbat yoki manfiy aniqlanganligini tekshirish uchun uni kanonik ko'rinishiga murojaat etish mumkin. Agar uning kanonik ko'rinishida barcha kvadratlar musbat (manfiy) koeffitsiyentlar bilan qatnashgan bo'lsa, u musbat (manfiy) aniqlangan bo'ladi. Ammo bu savolga ingliz matematigi D. Silvestr (1814–1897 y.) tomonidan isbotlangan ushbu teorema yordamida bevosita javob berish mumkin. Buning uchun oldin bir tushunchani kiritamiz.

5-TA'RIF: $A=(a_{ij})$, $i, j=1,2, \dots, n$, matritsaning $n-k, n-k+1, \dots, n$ -satr va ustunlarini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan Δ_k , $k=1,2, \dots, n$, minorlar **bosh minorlar** deyiladi.

Ta'rifga asosan bosh minorlar

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, k=1,2,\dots,n$$

ko'rinishda bo'ladi.

4-TEOREMA: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun uning A matritsasining barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani ham isbotsiz qabul etib, uning tasdig'ini yuqoridagi (11) kvadratik forma uchun tekshiramiz. Bunda

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \pm 2 \\ \pm 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & \pm 2 \\ \pm 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \mp 4 > 0$$

ekanligidan (11) kvadratik formaning musbat aniqlanganligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

5-TEOREMA: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun uning bosh minorlari uchun $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k=1,2, \dots, n$, shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masalan, yuqorida ko'rilgan (12) kvadratik forma uchun

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = -1 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \mp 1 > 0$$

ekanligidan, 5-teoremaga asosan, uni manfiy aniqlanganligi kelib chiqadi.

Amaliy tadbiqlari

Kvadratik formalarning amaliy tatbiqlari matematik model o'rnatish mumkin bo'lgan deyarli barcha sohalarida — **tizimli tahlil, iqtisodiyot, mexanika, ma'lumotlar fani** va **geometriyada** juda keng qo'llaniladi.

Quyida siz taqdim etgan nazariy asoslar (Silvestr teoremasi, kanonik ko'rinish va matritsalar rangi) real hayotdagi va amaliyotdagi muammolarni qanday hal qilishi batafsil yoritilgan:

1. Ko'p O'zgaruvchili Funksiyalarning Ekstremumlarini Topish (Optimallashtirish)

Matematik analizda biror funksiyaning eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymatlarini topish amaliyotda eng ko'p uchraydigan masaladir (masalan, ishlab chiqarish xarajatlarini minimallashtirish).

Ko'p o'zgaruvchili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning ekstremumga tekshirish uchun uning ikkinchi tartibli xususiy hosilalaridan **Gesse matritsasi** (Hessian matrix) tuziladi. Bu matritsa aynan **simmetrik matritsa** bo'lib, kvadratik formani ifodalaydi.

- **Silvestr teoremasining tatbiqi:** Agar Gesse matritsasining barcha bosh minorlari musbat bo'lsa ($\Delta_k > 0$), u holda kvadratik forma musbat aniqlangan bo'ladi va bu nuqtada funksiya **minimumga** erishadi.
- Agar minorlar ishorasi navbatma-navbat almashinsa ($\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots$), forma manfiy aniqlangan bo'lib, bu nuqtada **maksimum** mavjud bo'ladi.

2. Iqtisodiyotda: Foyda va Ishlab Chiqarish Modellari

Iqtisodiy tizimlarda resurslar cheklangan sharoitda maksimal foyda olish algoritmlari kvadratik formaga tayanadi.

- **Kvadratik dasturlash (Quadratic Programming):** Ko'p hollarda maqsad funksiyasi (xarajat yoki risk funksiyasi) kvadratik forma ko'rinishida, cheklovlar esa chiziqli tengsizliklar ko'rinishida bo'ladi.
- **Markovitsning portfel nazariyasi:** Moliyaviy moliya bozorida investitsiya portfelining riski (dispersiyasi) aktivlarning kovariatsiya matritsasi orqali kvadratik forma ko'rinishida hisoblanadi. Portfel riskini minimallashtirish masalasi musbat aniqlangan kvadratik formani minimallashtirishga keltiriladi.

3. Mashinali O'qitish va Data Science

Zamonaviy sun'iy intellekt va ma'lumotlar tahlilida kvadratik formalar algoritmlarning yadrosini tashkil qiladi.

- **Eng kichik kvadratlar usuli:** Modeldagi xatoliklar kvadratlari yig'indisini ($\sum e_i^2$) minimallashtirish jarayoni mohiyatan musbat aniqlangan kvadratik formaning eng kichik qiymatini topish demakdir.
- **Asosiy komponentalar tahlili:** Katta hajmli ma'lumotlarning o'lchamlarini kamaytirishda ma'lumotlar tarqoqligi (kovariatsiyasi) simmetrik matritsa ko'rinishida ifodalanadi. Ushbu kvadratik formani kanonik (diagonal) ko'rinishga keltirish orqali eng muhim informatsion o'qlar (faktorlar) ajratib olinadi.

4. Mexanika va Fizika: Kinetik Energiya va Barqarorlik

- **Kinetik energiya:** Qattiq jism yoki mexanik tizimning kinetik energiyasi uning tezlik komponentalariga nisbatan har doim **musbat aniqlangan kvadratik forma** bo'ladi:

$$T = \frac{1}{2} X^T M X > 0$$

Bu yerda M — tizimning massa (inersiya) matritsasidir. Jism to'xtab turmagan bo'lsa, uning energiyasi har doim noldan katta bo'lishi Silvestr teoremasi bilan hamohangdir.

- **Tebranishlar nazariyasi:** Tizimning kichik tebranishlarini muvozanat nuqtasi atrofida tahlil qilish uchun potensial va kinetik energiya kvadratik formalari

chiziqli almashtirishlar yordamida bir vaqtda kanonik ko'rinishga (bosh koordinatalarga) keltiriladi.

5. Geometriya va Kompyuter Grafikasi (Ikkinchi tartibli sirtlar)

Fazoda yoki tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlar (ellipse, giperbola, parabola) va sirtlarni (ellipsoid, giperboloid) aniqlash va ularning turini bilish uchun kvadratik formalardan foydalaniladi.

- **Kanonik ko'rinishga keltirish amaliyoti:** Masalan, koordinata o'qlari qiyshiq bo'lgan $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D$ ko'rinishdagi sirt tenglamasi berilgan bo'lsa, chiziqli almashtirma (burish va ko'chirish) orqali xy qatnashgan had yo'qotiladi (ya'ni diagonal/kanonik ko'rinishga keltiriladi). Bu esa muhandislik dasturlarida obyektlarni 3D render qilishni keskin tezlashtiradi.

XULOSA

Kvadratik formalar R^n fazosida ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni tadqiq qilishda kuchli matematik vositadir. Xususan, iqtisodiy optimallashtirish masalalarida foyda yoki xarajat funksiyalarining lokal ekstremumlarini (maksimum va minimumlarini) aniqlashda Teylor yoyilmasining ikkinchi tartibli hadi aynan kvadratik forma ko'rinishida bo'ladi va uning xarakteri Silvestr teoremasi orqali tekshiriladi. Shuningdek, datchiklar va mexanik tizimlar barqarorligini baholashda Lyapunov funksiyalarini qurish bevosita kvadratik formalarning musbat aniqlanganlik xossasiga tayanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev Chiziqli algebra . Darslik 2023 y.
2. А. С. Мищенко, Эрмитова К-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа, УМН, 1976, том 31
3. С. П. Новиков , Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов Z-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонового формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I, Изв. АН, сер. матем.
4. Ф.Гантмахер. Теория матриц. ЛитРес. 2018, 581 с.
5. [Leonard E. Fuller. Basic Matrix Theory ЛитРес. 2017, 256 с.](#)