

MATRITSA RANGINING AMALIY TATBIQLARI VA ZAMONAVIY TEXNOLOGIYALARDAGI O'RNI

Mamatova Nilufar Husenovna
Buxoro Davlat Universiteti Differensial
tenglamalari kafedrası Dotsenti

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli algebraning fundamental tushunchalaridan biri bo'lgan matritsa rangining amaliy va texnikaviy sohalaridagi tatbiqlari tadqiq etilgan. Matritsaning chiziqli erkli satrlari va ustunlari sonini ifodalovchi ushbu tushunchaning chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish, iqtisodiy modellashtirish, raqamli tasvirlarga ishlov berish, mashinali o'qitish va kodlash nazariyasidagi o'rni misollar orqali yoritilgan.

Kalit so'zlar: Matritsa rangi, elementar almashtirishlar, Kroneker-Kapelli teoremasi, tasvirlarni siqish, chiziqli erklilik.

Kirish

Matritsalar real dunyodagi ulkan ma'lumotlar bazalarini (ijtimoiy tarmoqlar, iqtisodiy ko'rsatkichlar, piksellar to'plami) saqlash va qayta ishlash uchun eng qulay strukturadir. Biroq, ko'pincha bu ulkan ma'lumotlar ichida bir-birini takrorlovchi (chiziqli bog'liq) satrlar yoki ustunlar mavjud bo'ladi. Matritsaning rangi bizga ushbu ma'lumotlar to'plamida qancha haqiqiy, noyob va mustaqil (chiziqli erkli) axborot borligini aniq aytib beradi. Matritsani elementar almashtirishlar orqali pog'onali ko'rinishga keltirish esa ushbu axborotni ortiqcha "shovqinlar"dan tozalash imkonini beradi.

Ko'pgina matematik va amaliy masalalarni yechish va tatqiq qilishda matritsaning rangi tushunchasi muhim o'rin tutadi.

$m \times n$ o'lchamli A matritsa berilgan bo'lsin. Ushbu matritsaning ixtiyoriy k ta (bunda $k \leq \min(m, n)$) satr va ustuni tanlab qolgan satr va ustunlarini o'chirib tashlash yo'li bilan k - tartibli qism matritsa hosil qilish mumkin. Ushbu hosil qilingan matritsa determinantiga A matritsadan k - tartibli minori deyiladi.

Ushbu ta'rifni quyidagicha ifodalash mumkin.

Ta'rif. Berilgan A matritsaning ixtiyoriy k ta satr va ustunini o'chirganda kesishishida turgan elementlardan tuzilgan matritsaning determinantiga A matritsaning k - tartibli minori deyiladi.

Misol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 4}, \quad k \leq \min(3,4) = 3, \quad M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} - 3\text{-chi tartibli minor}$$

Ta'rif. A matritsaning noldan farqli minorlarning yuqori tartibiga A matritsaning **rangi** deyiladi va u $r(A)$, **rang** (A) kabi belgilanadi.

Ushbu ta'rifdan rangning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $r(A) = 0$ bo'lsa, $A = 0$ bo'ladi.
2. $r(A) \leq \min(m, n)$.
3. n - tartibli A kvadrat matritsa uchun $r(A) = n$ bo'lishi uchun A ning xosmas bo'lishi zarur va yetarlidir.

Misol: Quyidagi matritsaning rangi topilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Yechish. $r(A) \leq \min(3,4) = 3$ bo'lib 3-tartibli minorlarda nollik ustunlar bo'lgani sababli, ularning qiymati nolga tengdir.

2-tartibli minorlar proporsional bo'lganligidan ularning qiymatlari ham nolga teng bo'ladi. $A \neq 0$ bo'lganligi sababli, $r(A) = 1$ bo'ladi.

Yuqoridagi ta'rif bo'yicha, matritsaning rangini topish ko'p hisoblashlarni talab qiladi. Shuning uchun biz matritsaning rangini o'zgartirmaydigan shakl almashtirishlar bajarib, uning rangini topamiz. Biz quyidagi shakl almashtirishlarni elementar shakl almashtirishlar deb ataymiz:

1. Berilgan matritsaning **0** (nollik) satrlarini (ustunlarini) tashlab yuborish;
2. Matritsaning satrlari (ustunlari) joylarini o'zaro almashtirish;
3. Matritsani noldan farqli biror songa ko'paytirish;
4. Matritsaning biror satrini (ustunini) biror songa ko'paytirib boshqa bir satriga (ustuniga) mos ravishda qo'shish;
5. Matritsani transponerlash.

Teorema. Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Biz berilgan matritsani elementar almashtirishlar natijasida quyidagi pog'onali matritsa deb ataladigan matritsa ko'rinishiga keltirishimiz mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & \dots & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, r}; \quad r \leq k$$

Ushbu pog'onali matritsaning rangi r ga teng, chunki r - tartibli noldan farqli minor mavjud:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & \dots & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_{22} \dots a_{rr} \neq 0$$

Misol. Matritsa rangi topilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $a_{11}=0$ bo'lganligi ushbu satr bilan boshqa satrning joylarini almashtiramiz, bu matritsa rangini o'zgartirmaydi. 1- va 2- satrlar joylarini almashtirib, 1- satrni mos ravishda 2 ga, 1 ga ko'paytirib, mos ravishda 3- va 4- satrlarga qo'shib quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Hosil qilingan matritsaning 2-satrini 3-ga ko'paytirib, mos ravishda 3- va 4- satrlarga qo'shib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oxirgi matritsa 2- tartibli noldan farqli minorga ega, ya'ni $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Bundan

$r(A)=2$ ga ega bo'lamiz.

Berilgan A matritsaning satrlarini quyidagicha belgilab olamiz:

$$e_1 = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n}), \quad e_2 = (a_{21} a_{22} \dots a_{2n}), \quad \dots, \quad e_m = (a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn})$$

Ikkita satr teng deyiladi agar ularning mos elementlari teng bo'lsa.

Satrni songa ko'paytirish va satrlarni qo'shishni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\lambda e_i = (\lambda e_{i1} \quad \lambda e_{i2} \quad \dots \quad \lambda e_{in}) \quad e_i + e_j = (a_{i1} + a_{j1} \quad a_{i2} + a_{j2} \quad \dots \quad a_{in} + a_{jn})$$

Ta'rif. Biror $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ haqiqiy sonlari uchun $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k$ tenglik bajarilsa e satrga $e_1, \dots, e_k$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

Ta'rif. Hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lgan, shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ haqiqiy sonlar topilib $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k = 0$ ($00\dots 0$) tenglik o'rinli bo'lsa, berilgan $e_1, \dots, e_k$ satrlarga chiziqli bog'liq deyiladi.

Aks holda ya'ni ushbu tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, ushbu satrlarga chiziqli **erkli** deyiladi.

Agar biror satrlar to'plami chiziqli bog'liq bo'lsa, bu vaqtda ushbu satrlarning hech bo'lmaganda bittasi qolganlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

Agar n – tartibli kvadratik matritsa berilgan bo'lib uning satrlari chiziqli bog'liq bo'lsa, uning determinanti nolga teng bo'ladi. Ya'ni $|A|=0$.

Ta'rif. Matritsaning rangi uning chiziqli erkli satrlarning (ustunlarining) maksimal soniga teng, bunda qolgan satrlar ushbu chiziqli erkli satrlarning (ustunlarining) chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

Misol.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad -3\ell_1 + \ell_2 = 0(00) \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 1$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 = 0 \quad \leadsto \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(1 \ 0) + \lambda_2(0 \ 1) = (\lambda_1 \ 0) + (\lambda_2 \ 0) = (\lambda_1 \ \lambda_2) = (0 \ 0)$$

Rang uchun quyidagi xossalar o'rinli:

$$(1) \ r(A+B) \leq r(A) + r(B),$$

$$(2) \ r(A+B) \geq |r(A)-r(B)|,$$

$$(3) \ r(A \cdot B) \leq \min \{r(A)r(B)\},$$

$$(4) \ r(A'A) = r(A),$$

$$(5) \ r(AB) = r(A), \text{ agar } B - \text{kvadrat matritsa va } |B| \neq 0$$

$$(6) \ r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

Bu yerda n A matritsaning ustunlari soni yoki B matritsaning satrlari soni.

Misol. Quyidagi matritsaning rangi topilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & -10 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & -10 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 15 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 15 & -4 \end{pmatrix} = 0$$

- 1) Birinchi satrni (-2)ga ko'paytiramiz, unda 2-qatorni qo'shamiz.
- 2) Birinchi satrni (-2)ga ko'paytiramiz, unda 3-qatorni qo'shamiz.
- 3) Birinchi satrni (-3)ga ko'paytiramiz, unda 4-qatorni qo'shamiz.

Natijada oxirgi matritsadan $r(A)=2$ bo'lishini topamiz.

1. Chiziqli Tenglamalar Sistemalarining Yechimini Tahlil Qilish

Muhandislik va iqtisodiyotdagi eng keng tarqalgan masala bu chiziqli tenglamalar sistemasini (ChTS) yechishdir. Matritsa rangi tizimning yechimga ega yoki ega emasligini aniqlashda hal qiluvchi rol o'ynaydi (**Kroneker-Kapelli teoremasi**):

- **Yechim mavjud emas:** Agar asosiy matritsa rangi kengaytirilgan matritsa rangidan kichik bo'lsa, sistema birgalikda emas (yechimga ega emas).
- **Yagona yechim:** Agar $r(A) = r(A|B) = n$ (n — o'zgaruvchilar soni) bo'lsa, sistema xosmas va yagona yechimga ega bo'ladi.
- **Cheksiz ko'p yechim:** Agar $r(A) = r(A|B) < n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, ba'zi o'zgaruvchilar erkin o'zgaruvchilar hisoblanadi.

2. Raqamli Tasvirlarni Siqish (Image Compression)

Kompyuter texnologiyalarida har bir raqamli tasvir (rasm) piksellar rangining intensivligini ko'rsatuvchi ulkan matritsadan iborat. Masalan, 1000×1000 o'lchamli rasmda 1 000 000 ta piksel bor.

Matritsaning **Singulyar yoyilmasi (SVD)** deb ataladigan usul yordamida yuqori tartibli matritsa kichikroq rangli (Low-Rank Approximation) matritsalar yig'indisiga keltiriladi.

- Agar tasvir matritsasining rangi $r = 1000$ bo'lsa, uning eng muhim (katta) singulyar qiymatlariga mos keluvchi masalan, $r = 50$ ta satr va ustunigina saqlab qolinadi, qolgan chiziqli bog'liq yoki juda kichik ta'sirga ega qismlari o'chiriladi.
- Natijada rasm sifati deyarli o'zgarmagan holda uning kompyuter xotirasida egallagan hajmi 10-20 barobargacha kamayadi.

3. Mashinali O'qitish va Tavsiya Tizimlari (Recommendation Systems)

Netflix, YouTube yoki Spotify kabi platformalar foydalanuvchilarga qanday qilib kontent tavsiya qiladi? Bu jarayonning ortida "**Matritsalarini faktorizatsiyalash**" (**Matrix Factorization**) algoritmi yotadi.

Tasavvur qiling, millionlab foydalanuvchilar (satrlar) va minglab filmlar (ustunlar) mavjud. Foydalanuvchilar hamma filmlarni ko'rmagani uchun matritsaning ko'p kataklari bo'sh bo'ladi. Bu ulkan matritsa aslida **past rangga (low rank)** ega, chunki odamlarning qiziqishlari (janrlar bo'yicha) chiziqli bog'liqdir. Matritsa rangini minimallashtirish va uni past o'lchamli chiziqli erkli qismlarga ajratish orqali tizim foydalanuvchining bo'sh kataklariga u qanday baho berishi mumkinligini yuqori aniqlikda bashorat qiladi.

4. Iqtisodiyotda Tarmoqlararo Balans (Leontief Modeli)

Iqtisodiyotda davlatning turli tarmoqlari (sanoat, qishloq xo'jaligi, transport) bir-biri bilan uzviy bog'liq. Bir tarmoqning mahsuloti ikkinchisi uchun xomashyo hisoblanadi. Vassiliy Leontief (Nobel mukofoti sovrindori) tomonidan taklif etilgan tarmoqlararo balans modelida ishlab chiqarish hajmi quyidagi tenglama orqali topiladi:

$$(I - A)X = Y$$

5. Kriptografiya va Kodlash Nazariyasi (Xatolarni Tuzatuvchi Kodlar)

Kosmik stansiyalardan yoki chuqur okean ostidagi kabellardan ma'lumot uzatilganda, tashqi shovqinlar sababli signalning ba'zi bitlari (0 yoki 1) o'zgarib, xatoliklar yuzaga keladi.

Axborot texnologiyalarida **Chiziqli blokli kodlar** (masalan, Hamming kodlari) ma'lumotlarni uzatishda xatolarni aniqlash va ularni avtomatik tuzatish uchun qo'llaniladi. Buning uchun tizimda **Yaratuvchi matritsa (Generator matrix)** ishlatiladi. Ushbu matritsaning rangi kodning o'lchamini va uning necha bitli xatolikni mustaqil ravishda aniqlab, tiklay olish qobiliyatini (minimal masofasini) belgilab beradi.

Xulosa

Matritsa rangi — bu faqatgina oliy matematika darsligidagi mavhum sonli hisob-kitob emas. U bugungi kunda biz har kuni ishlatadigan smartfonlar xotirasini tejashda, internet qidiruv tizimlarining ishlashida (Google PageRank), sun'iy intellektda va iqtisodiy rejalashtirishda sahna ortidagi eng asosiy matematik vosita bo'lib xizmat qilmoqda. Matritsa rangini elementar almashtirishlar orqali to'g'ri aniqlash texnik muammolarni optimal yechish kafolatidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev Chiziqli algebra . Darslik 2023 y.

2. А. С. Мищенко, Эрмитова К-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа, УМН, 1976, том 31
3. С. П. Новиков , Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов Z-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонового формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I, Изв. АН, сер. матем.
4. Ф.Гантмахер. Теория матриц. ЛитРес. 2018, 581 с.
5. [Leonard E. Fuller](#). **Basic Matrix Theory** ЛитРес. 2017, 256 с.