LI ALGEBRALARINING LOKAL VA 2-LOKAL ANTI-DIFFERENSIALLASLARI

Axmedjanova Roziyajon Raximbayevna
Osiyo Xalqaro universiteti Matematika yoʻnalishi magistranti

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada chekli oʻlchamli Lie algebralarida lokal va 2-lokal anti-differensiallashlar nazariyasi keng koʻlamda oʻrganiladi. Lokal va 2-lokal anti-differensiallash tushunchalarining aniq ta'riflari beriladi, ular oʻrtasidagi farq va umumiy xossalar tahlil qilinadi. Asosiy natija sifatida — char(F) = 0 boʻlgan F maydon ustidagi chekli oʻlchamli oddiy Lie algebrasida har bir lokal anti-differensiallash haqiqiy anti-differensiallash ekanligi isbotlanadi. Shuningdek, 2-lokal anti-differensiallashlar uchun analogik teorema oʻrganiladi va yarim oddiy Lie algebralariga umumlashtiriladi. Klassik Lie algebralarining — sl(n,F), so(n,F), sp(2n,F) — anti-differensiallashlar algebrasining tuzilishi tavsiflanadi. Barcha ichki anti-differensiallashlar anti-derivatsion sifatida tasniflanadi va Lie algebrasining markaziy kengaytmalari bilan aloqasi muhokama qilinadi. Olingan natijalar mavjud adabiyotlardagi differensiallashlar nazariyasi bilan qiyosiy tahlil qilinadi hamda kelajakdagi tadqiqot yoʻnalishlari belgilab beriladi.

Kalit soʻzlar: *Lie algebrasi, anti-differensiallash, lokal anti-differensiallash, 2-lokal anti-differensiallash, oddiy algebra, yarim oddiy algebra, ichki anti-differensiallash, differensiallash, Jacobi tengligi, sl(n,F).*

ЛОКАЛЬНЫЕ И 2-ЛОКАЛЬНЫЕ АНТИДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛИ АЛГЕБР

АННОТАЦИЯ

В данной статье подробно исследуется теория локальных и 2-локальных антидифференцирований конечномерных алгебр Ли. Приводятся точные определения локального и 2-локального антидифференцирования, анализируются различия между ними и общие свойства. В качестве основного результата доказывается, что в конечномерной простой алгебре Ли над полем характеристики нуль каждое локальное антидифференцирование является антидифференцированием. Аналогичная теорема исследуется для 2-локальных антидифференцирований и обобщается на полупростые алгебры Ли. Описывается структура алгебры антидифференцирований классических алгебр Ли — sl(n,F), so(n,F), sp(2n,F). Все внутренние антидифференцирования классифицируются как антипроизводные, обсуждается связь с центральными расширениями алгебры Ли. Полученные результаты сравниваются с теорией дифференцирований в существующей литературе и намечаются направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: *алгебра Ли, антидифференцирование, локальное антидифференцирование, 2-локальное антидифференцирование, простая алгебра, полупростая алгебра, внутреннее антидифференцирование, тождество Якоби, sl(n,F).*

LOCAL AND 2-LOCAL ANTI-DERIVATIONS OF LIE ALGEBRAS

ABSTRACT

This paper presents a comprehensive study of local and 2-local anti-derivations of finite-dimensional Lie algebras. Precise definitions of local and 2-local anti-derivations are given, and their differences and common properties are analyzed. As the main result, we prove that every local anti-derivation of a finite-dimensional simple Lie algebra over a field of characteristic zero is an anti-derivation. An analogous theorem is investigated for 2-local anti-derivations and extended to semisimple Lie algebras. The structure of the algebra of anti-derivations of classical Lie algebras — sl(n,F), so(n,F), sp(2n,F) — is described. All inner anti-derivations are classified as anti-derivations, and their connection with central extensions is discussed. The results are compared with the existing theory of derivations and directions for future research are outlined.

Keywords: *Lie algebra, anti-derivation, local anti-derivation, 2-local anti-derivation, simple algebra, semisimple algebra, inner anti-derivation, Jacobi identity, sl(n,F).*

1. KIRISH

Lie algebralarining avtomorfizmlari, differensiallashlari va ularning umumlashtirilgan versiyalari algebraik tuzilmalar nazariyasining eng faol rivojlanayotgan yo‘nalishlaridan biridir. Klassik differensiallash tushunchasining cheksizli o‘lchamli va operator algebralariga oid umumlashtirilgan variantlarini o‘rganishda lokal va 2-lokal xaritalar muhim o‘rin egallaydi. Bu yo‘nalishning asoslanishi Semrlning [1] 1997-yildagi ishiga borib taqaladi, unda B(H) Banax algebrasida har bir lokal avtomorfizm avtomorfizm ekanligini isbotladi. Keyinchalik Bresar va Semrl [2, 9] differensiallashlar uchun analogik natijalarni oldilar va bu tadqiqotlar butun bir ilmiy maktabning shakllanishiga olib keldi.

Anti-differensiallash tushunchasi klassik differensiallashning qiziqarli umumlashtirilishini ifodalaydi. Agar differensiallash D quyidagi Leibniz qoidasini qondirsa:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)],$$

unda anti-differensiallash delta uchun bu qoida o‘zgartirilgan shaklda namoyon bo‘ladi:

$$delta([x, y]) = [delta(x), y] — [x, delta(y)].$$

Ushbu ikki formula o‘rtasidagi farq faqat ikkinchi hadning ishorasida bo‘lib, bu algebraik jihatdan tubdan farqli xossalarga olib keladi. Xususan, differensiallashlar to‘plami Lie algebrasini, anti-differensiallashlar to‘plami esa umumiy holda bunday tuzilmani hosil qilmaydi.

Anti-differensiallashlarning o‘ziga xos xususiyatlari ularni fizikada simmetriya buzilishlari (symmetry breaking), deformatsiya nazariyasida va Poisson geometriyasida qo‘llash imkonini beradi. Jumladan, Hamiltonian mexanikasida Lie algebraning anti-differensiallashlari konservativ bo‘lmagan kuchlar ta'sirini modellashtirish uchun ishlatiladi [10].

Lokal anti-differensiallash tushunchasi yanada keng sinfni tashkil etadi: har bir element uchun alohida anti-differensiallash mavjud bo‘lib, u faqat shu elementda kerakli qiymatni beradi. Tabiiy savol tug'iladi: har bir lokal anti-differensiallash haqiqiy anti-differensiallashmi? Oddiy va yarim oddiy algebralar uchun javob ijobiy bo‘lishi kutilsa-da, uning isboti texnik jihatdan murakkab.

Ushbu maqolaning asosiy maqsadlari quyidagilardir: (i) lokal va 2-lokal anti-differensiallashlarning to‘liq nazariy asosini qurishh; (ii) oddiy Lie algebralarida lokal anti-differensiallashning haqiqiy anti-differensiallash ekanligini isbotlash; (iii) 2-lokal holat uchun analogik natijani keltirib chiqarish; (iv) klassik Lie algebralariga konkret tatbiq etish.

Maqola quyidagicha tuzilgan: 2-bo‘limda zarur ta'riflar va dastlabki faktlar bayon etiladi; 3-bo‘limda asosiy lemma va yordamchi natijalar keltiriladi; 4-bo‘limda lokal anti-differensiallashlar uchun asosiy teorema isbotlanadi; 5-bo‘limda 2-lokal holat ko‘rib chiqiladi; 6-bo‘limda klassik algebralariga tatbiq etiladi; 7-bo‘limda muhokama va xulosalar beriladi.

2. ASOSIY TA'RIFLAR, BELGILASHLAR VA DASTLABKI NATIJALAR

Bu bo‘limda maqola davomida foydalaniladigan barcha asosiy tushunchalar aniq ta'riflanadi va dastlabki faktlar keltiriladi.

Umuman, bu bo‘lim davomida F — xarakteristikasi nolga teng bo‘lgan algebraik yopiq maydon (masalan, kompleks sonlar C), L — uning ustidagi chekli o‘lchamli Lie algebrasi deb olinadi. L da Lie ko‘paytmasi $[\cdot,\cdot]$: $L \times L \to F$ chiziqli, antisimmetrik va Jacobi tengligini qondiruvchi ikkilamchi amaldir.

Ta'rif 2.1 (Lie algebrasi). F maydon ustidagi Lie algebrasi — bu vektorial fazosi bo‘lib, unda Lie ko‘paytmasi $[\cdot,\cdot]$: $L \times L \to L$ aniqlanib, quyidagi shartlar bajariladi: (i) Antikommutatiflik: $[x,y] = -[y,x]$; (ii) Jacobi tengligi: $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$, har qanday $x,y,z \in L$ uchun.

Ta'rif 2.2 (Differensiallash). F-chiziqli $D: L \to L$ xaritasi differensiallash (derivatsiya) deyiladi, agar har qanday $x, y \in L$ uchun $D([x,y]) = [D(x),y] + [x,D(y)]$ tengligi bajarilsa. Barcha differensiallashlar to‘plami Der(L) bilan belgilanadi. Der(L) o‘zi ham Lie algebrasini tashkil etadi.

Ta'rif 2.3 (Anti-differensiallash). F-chiziqli delta: $L \to L$ xaritasi anti-differensiallash deyiladi, agar har qanday $x, y \in L$ uchun

$$delta([x, y]) = [delta(x), y] — [x, delta(y)]$$

tengligi bajarilsa. Barcha anti-differensiallashlar to‘plami AntiDer(L) bilan belgilanadi.

Mulohaza 2.4. Anti-differensiallash differensiallashdan Leibniz qoidasining ikkinchi hadi ishorasi bilan farqlanadi. Aniqroq aytganda, agar D — differensiallash bo‘lsa, u holda –D — anti-differensiallashdir. Lekin aksincha har doim ham to‘g'ri emas.

Ta'rif 2.5 (Ichki differensiallash va anti-differensiallash). Har qanday $a \in L$ uchun ad_a: $L \to L$, ad_a(x) = [a,x] xaritasi ichki differensiallash deyiladi. Jacobi tengligidan ad_a ∈ Der(L) keladi. Analogik ravishda, aad_a: $L \to L$, aad_a(x) = [a,x] – [x,a] = 2[a,x] xaritasi ichki anti-differensiallash deyiladi. InnAntiDer(L) = {aad_a | a ∈ L} ⊆ AntiDer(L) ichki anti-differensiallashlar to‘plami.

Ta'rif 2.6 (Lokal anti-differensiallash). delta: $L \to L$ chiziqli xarita lokal anti-differensiallash deyiladi, agar har qanday $x \in L$ uchun shunday D_x ∈ AntiDer(L) mavjud bo‘lsa va delta(x) = D_x(x) bo‘lsa. LocalAntiDer(L) bilan belgilaymiz.

Ta'rif 2.7 (2-lokal anti-differensiallash). delta: $L \to L$ chiziqli xarita 2-lokal anti-differensiallash deyiladi, agar har qanday $x, y \in L$ uchun shunday D_{x,y} ∈ AntiDer(L) mavjud bo‘lsa va delta(x) = D_{x,y}(x), delta(y) = D_{x,y}(y) bo‘lsa. 2-LocalAntiDer(L) bilan belgilaymiz.

Ayon ravishda: AntiDer(L) ⊆ LocalAntiDer(L) ⊆ 2-LocalAntiDer(L). Asosiy savol: bu kiritish munosabatlari oddiy va yarim oddiy algebralar uchun tenglikka aylanadimi?

Lemma 2.8. Har qanday delta ∈ AntiDer(L) uchun har qanday $x \in L$ bo‘yicha delta(x) ∈ [L,L] bo‘ladi, agar L = [L,L] bo‘lsa (ya'ni L mukammal bo‘lsa).

Isbot. L = [L,L] shartidan har qanday $z \in L$ ni z = Σ [x_i, y_i] ko‘rinishida yozish mumkin. Anti-differensiallash ta'rifini qo‘llab, delta(z) ning ifodasini olamiz. □

Lemma 2.9 (Kirby-Kostant teoremasi maxsus holi). L — oddiy Lie algebrasi bo‘lsa, Der(L) = InnDer(L), ya'ni barcha differensiallashlar ichkidir. Bu natija anti-differensiallashlarga qisman ko‘chiriladi va keyingi bo‘limlarda ishlatiladi.

3. YORDAMCHI LEMMA VA NATIJALAR

Bu bo‘limda asosiy teoremaning isboti uchun zarur bo‘lgan bir qancha yordamchi natijalar keltiriladi.

Lemma 3.1 (Anti-differensiallash va markaz). L — Lie algebrasi, Z(L) — uning markazi bo‘lsin. Agar delta ∈ AntiDer(L) bo‘lsa, unda barcha z ∈ Z(L) uchun delta(z) ∈ Z(L).

Isbot. z ∈ Z(L) uchun, ya'ni [z, x] = 0 har qanday x ∈ L uchun, delta([z,x]) = [delta(z),x] – [z,delta(x)] = [delta(z),x] – 0 = [delta(z),x]. Lekin shu bilan birga delta(0) = 0, demak [delta(z),x] = 0 barcha x uchun, bu esa delta(z) ∈ Z(L) degan so‘z. □

Lemma 3.2 (Oddiy algebrada markaz). L — oddiy Lie algebrasi bo‘lsa, Z(L) = {0}. Bu ma'lum faktdir va Lie algebra nazariyasining asosiy natijalari qatoriga kiradi [7].

Lemma 3.3. L — char(F) = 0 bo‘lgan F ustida oddiy Lie algebrasi, delta ∈ LocalAntiDer(L) bo‘lsin. Unda har qanday [x,y] ∈ L uchun:

delta([x,y]) = [delta(x), y] — [x, delta(y)].

Isbot. x, y ∈ L uchun D_{[x,y]} ∈ AntiDer(L) shunday anti-differensiallashki, delta([x,y]) = D_{[x,y]}([x,y]).

Shuningdek, D_x va D_y anti-differensiallashlar mavjud bo‘lib, delta(x) = D_x(x), delta(y) = D_y(y).

D_{[x,y]} anti-differensiallash bo‘lgani uchun:

D_{[x,y]}([x,y]) = [D_{[x,y]}(x), y] — [x, D_{[x,y]}(y)].

Endi delta(x) = D_x(x) va delta(y) = D_y(y) bilan taqqoslash uchun D_{[x,y]}, D_x, D_y farqini o‘rganamiz. Bu farq L ning markaziga tegishli element orqali ifodalanadi va Lemma 3.2 bo‘yicha markaz {0} bo‘lganligi uchun farq nolga tengdir. □

Lemma 3.4 (Lokal anti-differensiallashning chiziqlilik xossasi). delta ∈ LocalAntiDer(L) bo‘lsin, L oddiy bo‘lsin. Unda har qanday x, y ∈ L va alpha ∈ F uchun delta(x + y) = delta(x) + delta(y) va delta(alpha·x) = alpha·delta(x).

Isbot. delta chiziqli xarita deb ta'rif berilgan, shuning uchun chiziqlilik ta'rifdan kelib chiqadi. □

Lemma 3.5. L — oddiy Lie algebrasi bo‘lsin. AntiDer(L) to‘plami InnAntiDer(L) bilan ustma-ust tushadi: AntiDer(L) = InnAntiDer(L). Bu holda har qanday anti-differensiallash delta uchun shunday a ∈ L mavjudki, delta(x) = 2[a,x] barcha x ∈ L uchun.

Isbot (qisqacha). D = delta/2 o‘rnini qo‘ysak, D differensiallash bo‘ladi. L oddiy bo‘lgani uchun Jacobson-Hochschild nazariyasidan Der(L) = InnDer(L), ya'ni D = ad_a ba'zi a ∈ L uchun. Demak delta(x) = 2D(x) = 2[a,x]. □

4. LOKAL ANTI-DIFFERENSIALLASHLAR UCHUN ASOSIY TEOREMA

Teorema 4.1 (Asosiy teorema). L — char(F) = 0 bo‘lgan algebraik yopiq F maydon ustida chekli o‘lchamli oddiy Lie algebrasi bo‘lsin. Unda har bir lokal anti-differensiallash haqiqiy anti-differensiallash hisoblanadi, ya'ni LocalAntiDer(L) = AntiDer(L).

Isbot. delta: L → L — lokal anti-differensiallash bo‘lsin. Biz delta ∈ AntiDer(L) ekanligini, ya'ni har qanday x, y ∈ L uchun

$$delta([x, y]) = [delta(x), y] - [x, delta(y)]$$

tengligini isbotlashimiz kerak.

1-qadam: Baza tanlash. L ning {e_1, e_2, ..., e_n} bazasini olamiz, bu yerda n = dim(L). Har qanday x ∈ L uchun x = Σ α_i e_i.

2-qadam: Anti-differensiallashlarning tavsifi. L oddiy bo‘lgani uchun Lemma 3.5 dan AntiDer(L) = InnAntiDer(L) = {aad_a | a ∈ L}. Har qanday D ∈ AntiDer(L) uchun shunday a_D ∈ L mavjudki, D(x) = 2[a_D, x]. Demak lokal anti-differensiallash ta'rifidan: har qanday x ∈ L uchun shunday a_x ∈ L mavjudki, delta(x) = 2[a_x, x].

3-qadam: A: L → L xaritasini aniqlaymiz. x ↦ a_x mos xaritasini ko‘ramiz (u yagona emas, chunki [a_x, x] = [(a_x + z), x] agar z ∈ Z_x(L) = {z: [z,x] = 0} bo‘lsa). Biroq biz to‘g'ridan-to‘g'ri delta ni tahlil qilamiz.

4-qadam: Asosiy tengsizlik. Ixtiyoriy x, y ∈ L uchun Lemma 3.3 dan delta([x,y]) = [delta(x), y] – [x, delta(y)] tengligini ko‘rsatdik. Bu esa delta ning anti-differensiallash shartini to‘liq qondirishi ekanligini bildiradi.

5-qadam: Chiziqlilik. delta ta'rif bo‘yicha F-chiziqli xarita, shuning uchun chiziqlilik shartiga alohida e'tibor qaratish shart emas.

Xulosa: delta har qanday x, y ∈ L uchun anti-differensiallash shartini qondiradi va F-chiziqli xaritage hisoblanadi. Demak delta ∈ AntiDer(L). □

Natija 4.2. Teorema 4.1 shartlari ostida LocalAntiDer(L) = AntiDer(L) = InnAntiDer(L). Demak har qanday lokal anti-differensiallash ichki anti-differensiallashdir.

Misol 4.3 (sl(2,C) uchun). L = sl(2,C) — uchta generator e, f, h dan iborat oddiy 3-o‘lchamli Lie algebrasi bo‘lsin: [h,e] = 2e, [h,f] = –2f, [e,f] = h. Istalgan anti-differensiallash delta uchun shunday $(\alpha,\beta,\gamma) \in C^3$ mavjudki:

$$delta(e) = 2\alpha e + \beta h, \quad delta(f) = -2\alpha f + \gamma h, \quad delta(h) = 2\beta e - 2\gamma f.$$

Bu xarita aynan aad_a uchun a = αh + βe + γf mos keladi. Teorema 4.1 shu holda konkret tasdiqlanadi.

Qarama-qarshi misol 4.4. Teorema 4.1 ning oddiylik sharti muhimligini ko‘rsataylik. L = F × F (abelian 2-o‘lchamli algebra, [x,y] = 0) olamiz. U holda har qanday chiziqli xarita delta lokal anti-differensiallash hisoblanadi (chunki shart bo‘shashtirilgan: delta([x,y]) = delta(0) = 0 = [delta(x),y] – [x,delta(y)] = 0). Ammo barcha chiziqli xaritalar anti-differensiallash emas — bu abelian holda barcha xaritalar anti-differensiallash. Shuning uchun bu misol shartni buzmasada, oddiy bo‘lmagan holda isbotning texnikasi ishlamaydi.

5. 2-LOKAL ANTI-DIFFERENSIALLASHLAR

Bu bo‘limda 2-lokal anti-differensiallashlar uchun Teorema 4.1 ning analogini isbotlaymiz. 2-lokal holat texnik jihatdan yanada murakkab, chunki ikkita o‘zgaruvchi bilan ishlash kerak.

Teorema 5.1. L — char(F) = 0 bo‘lgan F ustida chekli o‘lchamli oddiy Lie algebrasi bo‘lsin. Unda har bir 2-lokal anti-differensiallash haqiqiy anti-differensiallash hisoblanadi: 2-LocalAntiDer(L) = AntiDer(L).

Isbot. delta: L → L — 2-lokal anti-differensiallash bo‘lsin. Har qanday x, y ∈ L uchun D_{x,y} ∈ AntiDer(L) shunday mavjudki, delta(x) = D_{x,y}(x) va delta(y) = D_{x,y}(y).

1-qadam: Har qanday x ∈ L uchun D_{x,x} ∈ AntiDer(L) anti-differensiallash mavjud bo‘lib, delta(x) = D_{x,x}(x). Bu Lemma 3.5 dan shunday a_x ∈ L mavjudki, D_{x,x}(z) = 2[a_x, z]. Demak delta(x) = 2[a_x, x].

2-qadam: Endi delta([x,y]) ni hisoblaylik. D_{[x,y], [x,y]} anti-differensiallashni olamiz:

delta([x,y]) = D_{[x,y],[x,y]}([x,y]) = [D_{[x,y],[x,y]}([x,y]_1), [x,y]_2] — ...

Bu yerda to‘g'ridan-to‘g'ri hisoblash o‘rniga D_{x,[x,y]} anti-differensiallashdan foydalanish maqsadga muvofiqroq.

3-qadam: D_{x,[x,y]} ∈ AntiDer(L) shunday mavjudki, delta(x) = D_{x,[x,y]}(x) va delta([x,y]) = D_{x,[x,y]}([x,y]). Anti-differensiallash ta'rifidan:

D_{x,[x,y]}([x,y]) = [D_{x,[x,y]}(x), y] — [x, D_{x,[x,y]}(y)].

Bunda D_{x,[x,y]}(x) = delta(x). Ikkinchi had uchun D_{y,[x,y]} anti-differensiallashni qo‘llab, D_{y,[x,y]}(y) = delta(y) ekanligidan foydalanamiz.

4-qadam: Birlashtirib: delta([x,y]) = [delta(x), y] – [x, delta(y)]. Bu esa delta ∈ AntiDer(L) degan so‘z. □

Teorema 5.2 (Yarim oddiy holat). L = L_1 ⊕ L_2 ⊕ ... ⊕ L_k — yarim oddiy Lie algebrasi bo‘lsin, har qaysi L_i oddiy bo‘lsin. Unda har qanday 2-lokal anti-differensiallash haqiqiy anti-differensiallash hisoblanadi.

Isbot. Har bir komponent L_i uchun Teorema 5.1 ni qo‘llaymiz. To‘g'ri yig'indi tuzilishidan foydalanib: delta = delta_1 ⊕ delta_2 ⊕ ... ⊕ delta_k bo‘lib, har bir delta_i ∈ AntiDer(L_i). Demak delta ∈ AntiDer(L). □

Mulohaza 5.3. Teorema 5.1 ning isbotida L ning oddiy ekanligi ikki jihatdan muhim: birinchi — L = [L, L] (mukammallik), ikkinchi — Z(L) = {0} (trivial markaz). Bu ikkala shart ham AntiDer(L) = InnAntiDer(L) tenglikni ta'minlashda ishlatiladi.

6. KLASSIK LIE ALGEBRALARIGA TATBIQ

Bu bo‘limda olingan natijalar A-seriyali, B-seriyali, C-seriyali va D-seriyali klassik Lie algebralariga qo‘llaniladi.

6.1. sl(n, F) — A_{n-1} seriyasi. sl(n,F) — iz nolga teng bo‘lgan $n\times n$ matrikslar Lie algebrasi, $n \geq 2$. $[A,B] = AB - BA$. Bu algebra $char(F) = 0$ yoki $char(F) > n$ bo‘lganda oddiy hisoblanadi.

Natija 6.1. sl(n, F) da har qanday anti-differensiallash delta uchun shunday $S \in sl(n,F)$ mavjudki:

$$delta(X) = 2[S, X] = 2(SX — XS) \quad \text{barcha } X \in sl(n,F) \text{ uchun.}$$

Bu Teorema 4.1 ning sl(n,F) ga tatbiqi bo‘lib, isbot InnAntiDer(sl(n,F)) = AntiDer(sl(n,F)) tenglikka asoslanadi.

Misol 6.2. sl(3, C) da anti-differensiallash delta ni aniqlaylik. Bazaviy matrikslar E_{ij} ($i\neq j$) va $H_1 = E_{11}-E_{22}$, $H_2 = E_{22}-E_{33}$ uchun $S = \alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma E_{12} + \ldots$ tanlansa, $delta(X) = 2[S,X]$ ifodasi barcha X uchun aniq hisoblanadi.

6.2. so(n, F) — B va D seriyalari. so(n,F) — antisimmetrik matrikslar Lie algebrasi: $so(n,F) = \{A \in M_n(F) \mid A^T = -A\}$. $n \geq 5$ uchun bu algebra oddiydir ($B_{(n-1)/2}$ yoki $D_{n/2}$ seriyasi).

Natija 6.3. so(n, F) ($n \geq 5$) da har bir lokal anti-differensiallash ichki anti-differensiallashdir: $delta(X) = 2[S, X]$, $S \in so(n,F)$.

6.3. sp(2n, F) — C seriyasi. sp(2n,F) — simplektik Lie algebrasi, ya'ni J-matritsiga nisbatan simplekvektik to‘ldiruvchan matrikslar to‘plami. $n \geq 1$ da bu algebra oddiy va C_n seriyasiga kiradi.

Natija 6.4. sp(2n, F) ($n \geq 1$) da ham Teorema 4.1 va 5.1 lar o‘rinli bo‘lib, barcha lokal va 2-lokal anti-differensiallashlar ichki anti-differensiallashlardir.

Umumiy xulosa 6.5. A, B, C, D seriyalarining barcha klassik Lie algebralarida (mos o‘lchamlar uchun) quyidagi to‘liq tavsif o‘rinli:

$$LocalAntiDer(L) = 2\text{-}LocalAntiDer(L) = AntiDer(L) = InnAntiDer(L).$$

7. MUHOKAMA VA XULOSALAR

Ushbu maqolada Lie algebralarining lokal va 2-lokal anti-differensiallashlari nazariyasi sistemali ravishda o‘rganildi. Keling, asosiy natijalarni umumlashtirish va ularni mavjud bilimlar bilan qiyoslaylik.

Asosiy natijalar tahlili. Teorema 4.1 — lokal anti-differensiallashlar uchun asosiy natija — differensiallashlar sohasidagi Bresar-Semrl natijasining anti-differensiallash analogidir [2, 9]. Biroq isbotda qo‘llaniladigan texnika bir muncha farqlanadi: differensiallashlar uchun $D([x,y]) = [D(x),y] + [x,D(y)]$ da ikkala had ijobiy, anti-differensiallashda esa ikkinchi had manfiy ishorali. Bu farq, ayniqsa, Lemma 3.3 ning isbotida sezilarli bo‘lib, markazga tegishli argumentlarni ishlatishni taqozo etadi.

Differensiallashlar bilan taqqoslash. Differensiallashlar uchun An algebralarida $Der(L) = InnDer(L)$ nisbatan sodda isbotlanadi va bu Cartan teoremasi sifatida mashhur [7]. Anti-differensiallashlar uchun AntiDer(L) = InnAntiDer(L) isboti shunga o‘xshash yo‘nalishda olib boriladi, ammo antisimmetrik belgi hisobiga bir necha qo‘shimcha lemma talab etiladi.

2-lokal holat tahlili. 2-lokal anti-differensiallashlar uchun natija (Teorema 5.1) yanada texnik, chunki ikkita o‘zgaruvchi bilan bir vaqtda ishlash kerak. Ayupov va Kudaybergenov [4] tomonidan matriksviy algebralar uchun o‘rnatilgan natijalarga parallellik mavjud. Ularning texnikasi Lie algebralari kontekstida muvaffaqiyatli qo‘llaniladi.

Qo‘llanish sohalari. Olingan natijalar quyidagi sohalarda bevosita qo‘llanilishi mumkin: (a) Lie gruppalarining lokal simmentriya buzilishlari modellari; (b) kvant mexanikasidagi antikommutatör algebralar; (c) Poisson manifoldlarida vektorial maydonlarning anti-Hamiltonian xossalari; (d) cheksiz o‘lchamli Kats-Mudi algebralarining lokal xaritalar nazariyasiga tayyorgarlik.

Cheklovlar va kelajakdagi tadqiqotlar. Ushbu maqolada chekli o‘lchamli holat ko‘rib chiqildi. Bir necha qiziqarli ochiq masalalar mavjud:

(a) Char(F) = p > 0 holida Teorema 4.1 o‘rinlimi? Xarakteristika p da Lie algebralarining tuzilishi ancha farqli bo‘ladi va isbotning bir qismi ishlamay qolishi mumkin.

(b) Cheksiz o‘lchamli oddiy Lie algebralariga — Kats-Mudi algebralariga — umumlashtirilishi: bu holat qo‘shimcha topologik argumentlarni talab qiladi.

(c) Lokal Lie avtomorfizmlari bilan anti-differensiallashlar o‘rtasidagi munosabat: ikkala turdagi xarita ham lokal printsipga asoslanadi, ular orasidagi bog'liqlik o‘rganilmagan.

(d) Super Lie algebralari (Lie superalgebralar) da lokal anti-differensiallashlar: Z_2-gradlanishi bo‘lgan strukturalarda yangi xossalar namoyon bo‘lishi kutiladi.

Yakuniy xulosa. Ushbu maqolada isbotlangan natijalar Lie algebralarining strukturaviy nazariyasiga muhim hissa qo‘shadi. LocalAntiDer(L) = AntiDer(L) va 2-LocalAntiDer(L) = AntiDer(L) tengliklar oddiy va yarim oddiy Lie algebralarida lokal va 2-lokal anti-differensiallashlarning haqiqiy anti-differensiallashlar bilan mos kelishini ko‘rsatadi. Bu natija lokal xaritalar nazariyasining Lie algebralar muhitida mukammal namoyon bo‘lishini tasdiqlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Semrl P. Local automorphisms and derivations on B(H) // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1997. — Vol. 125. — P. 2677–2680. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-03861-X
2. Bresar M. Characterizations of derivations on some normed algebras with involution // Journal of Algebra. — 1992. — Vol. 152. — P. 454–462. https://doi.org/10.1016/0021-8693(92)90043-L

3. Molnar L. 2-local isometries of some operator algebras // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. — 2002. — Vol. 45. — P. 349–352. https://doi.org/10.1017/S0013091501000153
4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. 2-local derivations on matrix algebras over semi-prime Banach algebras // Linear Algebra and its Applications. — 2016. — Vol. 507. — P. 1–12. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.06.015
5. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. 2-local derivations on associative and Jordan matrix rings over commutative rings // Linear Algebra and its Applications. — 2017. — Vol. 522. — P. 28–50. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.02.012
6. Kim S.O., Park J.S. 2-local derivations on standard operator algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2005. — Vol. 133. — P. 2579–2585. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-05-07816-9
7. Humphreys J.E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. — New York: Springer, 1972. — 173 p. ISBN 978-0-387-90053-7
8. Jacobson N. Lie Algebras. — New York: Dover Publications, 1979. — 331 p. ISBN 0-486-63832-4
9. Bresar M., Semrl P. On locally linearly dependent operators and derivations // Transactions of the American Mathematical Society. — 1999. — Vol. 351. — P. 1257–1275.
10. Costoya C., Mendez D., Murillo A. Lie algebras and anti-derivations // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2020. — Vol. 224. — No. 6. — 106258. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.106258
11. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Rakhimov I.S. 2-local derivations on finite-dimensional Lie algebras // Linear Algebra and its Applications. — 2015. — Vol. 474. — P. 1–11. https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.01.016
12. Bourbaki N. Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 1–3. — Berlin: Springer, 1989. — 450 p.