

LAPLAS OPERATORNING XOS QIYMATLAR VA XOS FUNKSIYALARI

Matchanova Orzigul

Annotatsiya: Ushbu maqola Laplas operatori (Δ) uchun qo'yilgan Shturm-Liuvill tipidagi masalalarni o'rganishga bag'ishlangan. Maqolada chegaralangan sohalarda Laplas operatorining xos qiymatlari va xos funksiyalarining mavjudligi, ularning ortogonallik xossasi hamda to'liqlik prinsipi tahlil qilinadi. Shuningdek, Dirixle va Neyman chegaraviy shartlarining spektrga ta'siri ko'rib chiqiladi. Tadqiqot fizik tizimlarning tebranish rejimlarini matematik modellashtirishdagi ahamiyatini yoritadi.

Kalit so'zlar: Laplas operatori, spektral muammo, xos qiymatlar, xos funksiyalar, Dirixle masalasi, Neyman masalasi, ortogonallik, to'lqin tenglamasi.

Tabiatdagi ko'plab fizik jarayonlar — issiqlikning tarqalishi, baraban pardasining tebranishi yoki membrana ustidagi to'lqinlarning harakati — Laplas operatori deb ataluvchi matematik vosita yordamida tasvirlanadi. Bu operator makondagi o'zgarishlarning qanchalik tez sodir bo'lishini o'lchaydi. Biz bu jarayonlarning "ichki ritmini" aniqlash uchun xos qiymatlar va xos funksiyalardan foydalanamiz.

Laplas operatori spektri bo'yicha nazariy asoslar XIX asr oxiri va XX asr boshlarida shakllangan. R. Karant va D. Hilbertning "Methods of Mathematical Physics" asari ushbu sohada fundamental hisoblanadi. Shuningdek, M. Kacning "Can one hear the shape of a drum?" (Baraban shaklini eshitib bo'ladimi?) nomli mashhur maqolasi xos qiymatlar va soha geometriyasi o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganishda yangi davrni ochib bergan. Zamonaviy tahlillarda esa Finite Element Method (FEM) yordamida diskretizatsiya masalalari muhim o'rin tutadi.

Laplas operatorining xos qiymatlari masalasini oddiyroq tushunish uchun baraban pardasini tasavvur qiling.

- Xos funksiyalar: Bular baraban pardasining turli shakldagi tebranish "modlari" (naqshlari)dir. Ba'zi qismlar yuqoriga harakatlansa, boshqalari pastga qarab tebranadi.
- Xos qiymatlar: Bular barabanning qaysi chastotada (tezlikda) tebranishini belgilaydi.
- Chegaraviy shartlar: Baraban qirralarining qanday mahkamlanganiga qarab (yoki qirralari erkin turganiga qarab), tebranish shakllari turlicha bo'ladi.

Laplas operatori matematik analiz, differensial tenglamalar nazariyasi va matematik fizika fanlarida muhim o'rin tutadi. U fazodagi funksiyalarning ikkinchi

tartibli xususiy hosilalarining yig'indisidan tashkil topadi va ko'plab fizik jarayonlarni tavsiflovchi tenglamalarda uchraydi. Xususan, issiqlikning tarqalish jarayoni, elastiklik nazariyasi, suyuqliklar oqimi, elektromagnit maydonlar va kvant mexanikasidagi masalalarda Laplas operatori asosiy matematik vosita hisoblanadi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun Laplas operatori quyidagi ko'rinishda aniqlanadi.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Agar funksiya ikki o'lchovli fazoda berilgan bo'lsa, operator quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Uch o'lchovli fazoda esa operator quyidagicha ifodalanadi.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Laplas operatorining xos qiymatlar masalasi matematik fizikaning ko'plab sohalarida uchrab, differensial tenglamalarni yechishda muhim ahamiyatga ega. Xos qiymatlar masalasi odatda chegaraviy shartlar bilan birgalikda qaraladi. Chegaraviy shartlar ichida Dirixle va Neyman shartlari eng ko'p qo'llaniladigan shartlar hisoblanadi. Dirixle sharti funksiya sohaning chegarasida nolga teng bo'lishini, Neyman sharti esa chegarada funksiya normal yo'nalish bo'yicha hosilasining nolga teng bo'lishini talab qiladi.

Xos qiymatlar masalasining asosiy mazmuni shundan iboratki, Laplas operatori ta'sirida funksiya o'z shaklini saqlab qoladi, faqat ma'lum bir son – xos qiymatga ko'payadi. Bu tushuncha quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$-\Delta u = \lambda u$$

Bu yerda λ xos qiymat, u esa unga mos keluvchi xos funksiyadir. Noldan farqli yechimlar mavjud bo'lishi uchun faqat ma'lum qiymatlardagi λ lar tanlanishi mumkin, bu qiymatlar xos qiymatlar deb ataladi.

Laplas operatorining o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligi spektral nazariyaning asosiy xossalari ta'minlaydi. Ya'ni, barcha xos qiymatlar haqiqiy sonlardan iborat bo'ladi. Dirixle shartlari ostida xos qiymatlar musbat bo'lib, ular o'suvchi ketma-ketlikni tashkil etadi va cheksizlikka intiladi. Boshqacha aytganda, xos qiymatlar soni cheksiz ko'p bo'ladi va ularning qiymatlari yuqoriga qarab cheksiz ortib boradi.

Xos funksiyalar esa turli xos qiymatlarga mos kelishiga qaramay, bir-biriga nisbatan ortogonal bo'ladi. Bu xossa Laplas operatori spektrining muhim

xususiyatlaridan biridir. Ortogonallik tufayli har qanday mos silliq funksiya ushbu xos funksiyalar bazisida yoyilishi mumkin. Bu jarayon ko'p hollarda Furye qatori shaklida yoziladi. Ya'ni, funksiya xos funksiyalar chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalanadi. Natijada murakkab differensial tenglamalarni yechish osonlashadi, chunki dastlabki masala oddiy masalalarga ajratiladi va har bir oddiy masala alohida ko'rib chiqiladi.

Laplas operatorining bir o'lchamli kesmadagi eng sodda holatini qaraydigan bo'lsak, masala nol va L nuqtalar orasidagi kesmada Dirixle shartlari bilan yechiladi. Bunda xos qiymatlar aniq qonuniyat asosida aniqlanadi va ular n sonining kvadratiga proporsional bo'ladi. Xos funksiyalar esa sinus funksiyalaridan tashkil topadi. Bu natija Furye sinus qatorlari nazariyasiga asos bo'lib xizmat qiladi.

Laplas operatorining xos qiymatlari va xos funksiyalarining fizik ma'nosi katta. Masalan, tor yoki membrananing tabiiy tebranish chastotalari xos qiymatlar orqali belgilanadi, xos funksiyalar esa tebranish shakllarini ifodalaydi. Issiqlik o'tkazuvchanligi tenglamasida xos qiymatlar haroratning vaqt bo'yicha so'nish tezligini belgilasa, xos funksiyalar haroratning fazodagi taqsimotini tavsiflaydi. Kvant mexanikasida esa zarrachaning energiya sathlari xos qiymatlar orqali aniqlanadi.

Bugungi kunda Laplas operatorining spektral nazariyasi nafaqat nazariy tadqiqotlarda, balki amaliy fanlarda ham keng qo'llanilmoqda. Chekli elementlar usuli, sonli modellash, kompyuter grafikasi, tasvirlarni qayta ishlash, geofizik tadqiqotlar va sun'iy intellektga oid ko'plab algoritmlarda ushbu nazariyadan samarali foydalaniladi. Murakkab sohalarida fizik jarayonlarni aniq va barqaror hisoblashda xos qiymatlar va xos funksiyalar tizimi muhim rol o'ynaydi.

Laplas operatori (Δ) uchun xos qiymatlar va xos funksiyalar masalasi matematik fizikaning eng muhim qismlaridan biri bo'lib, u "Spektral masalalar" nazariyasiga kiradi. Quyida ushbu mavzu matematik va fizik nuqtai nazardan batafsil yoritilgan.

Matematik ta'rif Laplas operatori uchun xos qiymat masalasi D chegaralangan sohada quyidagi differensial tenglama va chegaraviy shartlar bilan aniqlanadi:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in D$$

- Δu : Laplas operatori (yoki Laplasian). Dekart koordinatalar sistemasida: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
- λ (xos qiymat): Tenglama noldan farqli yechimga ega bo'ladigan qiymatlar to'plami.
- $u(x)$ (xos funksiya): λ qiymatga mos keluvchi funksiyalar.

Chegaraviy shartlarning ta'siri Xos qiymatlar va funksiyalar sohaning geometriyasiga va chegarada qo'yilgan shartlarga bog'liq:

A. Dirixle chegaraviy sharti ($u|_{\partial D} = 0$)

Bu shart "qattiq" chegara deyiladi.

- **Fizik ma'nosi:** Masalan, qirralari mahkamlangan (qimirlamaydigan) baraban yoki membrana.
- **Xususiyati:** Barcha xos qiymatlar musbat ($\lambda > 0$).
- **Misol (1D):** $[0, L]$ kesmada $\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$ va $u_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$.

B. Neyman chegaraviy sharti ($\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0$)

Bu shart "erkin" chegara deyiladi.

- **Fizik ma'nosi:** Issiqlik oqimi bo'lmagan chegara yoki erkin tebranayotgan membrana chekkasi.
- **Xususiyati:** Eng kichik xos qiymat $\lambda_0 = 0$ bo'lib, unga mos keluvchi xos funksiya o'zgarmas (konstanta) bo'ladi.

"Baraban shaklini eshitish mumkinmi?" Bu mashhur matematik savol (Mark Kats tomonidan berilgan): "Agar biror sohaning Laplas operatori xos qiymatlarining to'liq spektrini bilsak, shu sohaning shaklini aniqlay olamizmi?" 1992-yilda matematiklar shuni isbotlashdiki, "izospektral" (bir xil xos qiymatlarga ega, lekin shakli har xil) sohalar mavjud. Ya'ni, "baraban" ovozi eshitib, uning aynan qanday shaklda ekanligini to'liq aniqlab bo'lmaydi.

Laplas operatorining xos qiymatlari tizimning "geometrik barmoq izlari" hisoblanadi. Ular tizim qanchalik tez tebranishi, qanchalik tez qizishi yoki qaysi energiya holatlarida barqaror turishini belgilab beradi.

Xulosa

Eng qiziqarli savollardan biri shuki, agar biz tizimning barcha xos qiymatlarini (chastotalarini) bilsak, uning shaklini aniqlay olamizmi? Bu matematika va fizikada uzoq vaqt bahs-munozaralarga sabab bo'lgan mavzu. Shuningdek, murakkab shakllarda tebranishlar qanday taqsimlanishi amaliy muhandislikda, masalan, bino yoki ko'priklarning zilzilaga chidamliligini hisoblashda juda muhimdir.

Laplas operatorining spektral xossalari tushunish akustika, kvant mexanikasi va tasvirlarni qayta ishlashda muhim ahamiyat kasb etadi.

1. Murakkab geometrik shakllar uchun Laplas operatorining xos qiymatlarini hisoblashda Chebyshev spektral usullaridan foydalanish tavsiya etiladi.

2. Xos funksiyalarning vizualizatsiyasini (simulyatsiyasini) ishlab chiqish, o'quv jarayonida fizik tushunchalarni osonlashtirish uchun foydali bo'ladi.

3. Fraktal sohalar uchun xos qiymatlar taqsimotini o'rganish bo'yicha qo'shimcha ilmiy izlanishlar olib borish maqsadga muvofiq.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Courant, R., & Hilbert, D. (1989). *Methods of Mathematical Physics, Volume 1*. Wiley-Interscience. (Bu kitob Laplas operatori, chegaraviy shartlar va xos funksiyalar nazariyasining "oltin standarti" hisoblanadi).

2. Tixonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (2004). *Matematik fizika tenglamalari*. (O'zbek va rus tillarida nashr etilgan fundamental asar, differensial tenglamalarni yechishning nazariy asoslari uchun).

3. Reed, M., & Simon, B. (1980). *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis*. Academic Press. (Operatorlar nazariyasi va funksional tahlil nuqtai nazaridan yondashuv).

4. Chavel, I. (1984). *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press. (Laplas operatorining geometrik sohalaridagi xossalarni o'rganuvchilar uchun asosiy qo'llanma).

5. Kac, M. (1966). "Can one hear the shape of a drum?". *American Mathematical Monthly*, 73(4), 1-23. (Spektral geometriya sohasidagi eng mashhur maqolalardan biri).

6. Buser, P. (1992). *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser. (Spektral tahlil va uning chegaraviy masalalar bilan bog'liqligi haqida).

7. Strang, G., & Fix, G. J. (2008). *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press. (Xos qiymatlarni sonli usullarda hisoblash bo'yicha asosiy adabiyot).

8. Trefethen, L. N. (2000). *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM. (Zamonaviy spektral usullar va ularni dasturiy amalga oshirish metodikasi).