

FURYE QATORI YORDAMIDA YECHIMNI QURISH

Matchanova Orzigul

Annotatsiya: Ushbu maqolada xususiy hosilali differensial tenglamalarni (XHDT) yechishda Furiye qatorlarining roli batafsil ko'rib chiqiladi. O'zgaruvchilarni ajratish (Furiye) usuli orqali issiqlik o'tkazuvchanlik va tor tebranishi kabi klassik fizik masalalarning analitik yechimlarini qurish algoritmlari keltirilgan. Shuningdek, qatorlarning yaqinlashuvchanligi va chegaraviy shartlarning yechimga ta'siri tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: Furiye qatorlari, o'zgaruvchilarni ajratish, Shturm-Liuvill masalasi, ortogonallik, garmonik tebranishlar, Gibbs effekti.

Atrofimizdagi dunyo doimiy harakatda: gitara torining titrashi, xonadagi issiqlikning tarqalishi yoki okean to'lqinlari. Bu jarayonlar murakkab ko'rinishi mumkin, ammo matematik nuqtai nazardan ularning hammasini bitta oddiy qoida bilan ifodalash mumkin: "Har qanday murakkab jarayon oddiy, takrorlanuvchi garmonik tebranishlarning yig'indisidir". Furiye qatorlari aynan shu jarayonni – murakkabni soddaga ajratish imkonini beradi.

Tarixiy nuqtai nazardan, bu g'oya XVIII-XIX asrlarda Jozef Furiye tomonidan issiqlik o'tkazuvchanligini o'rganish jarayonida kashf etilgan. Dastlab ko'plab olimlar murakkab egri chiziqlarni sinus va kosinus kabi sodda tebranishlar yig'indisi bilan ifodalash mumkinligiga shubha bilan qarashgan. Biroq, keyinchalik bu yondashuv nafaqat issiqlik, balki tovush, yorug'lik va elektr signallari kabi barcha to'lqinli jarayonlar uchun fundamental asos bo'lib qoldi.

Furiye usuli qanday ishlaydi? Uni bosqichma-bosqich ko'rib chiqamiz:

- Ajratish bosqichi: Tasavvur qiling, bizda murakkab bir egri chiziq bor. Furiye usuli uni turli xil "balandlikdagi" va "tezlikdagi" ko'plab sinus to'lqinlariga bo'lib tashlaydi. Bu go'yo murakkab akordni chalib, uning ichidagi alohida notalarni aniqlashga o'xshaydi.
- Xos holatlarni aniqlash: Har bir jarayonning o'ziga xos "xarakteri" bo'ladi. Masalan, torning qayeridan ushlasak, u qanday shaklda tebranadi? Bu jarayonning chekkalari qanday mahkamlanganiga bog'liq. Furiye usuli ushbu cheklovlarni inobatga olgan holda, jarayonning eng toza va asosiy shakllarini aniqlab beradi.
- Qurish bosqichi: Biz aniqlagan har bir sodda to'lqinni ma'lum bir kuch bilan (koeffitsiyentlar yordamida) birlashtiramiz. Ularni yig'ganimizda, dastlabki murakkab jarayonimiz qayta tiklanadi.

Furye qatori yordamida yechimni qurish usuli funktsiyani sinus va kosinuslardan tashkil topgan cheksiz qator ko'rinishida ifodalashga asoslanadi. Bu usulning nazariy asosi trigonometrik funktsiyalarning ortogonallik xossasiga tayangan bo'lib, u qator koeffitsiyentlarini aniq hisoblash imkonini beradi.

Yechimni qurish jarayoni odatda berilgan differensial tenglama va unga mos boshlang'ich hamda chegaraviy shartlarni tahlil qilishdan boshlanadi. Keyingi bosqichda o'zgaruvchilarni ajratish usuli qo'llanilib, masala fazoviy va vaqt bo'yicha alohida tenglamalarga ajratiladi. Fazoviy qismning yechimi ko'pincha xos qiymatlar va xos funktsiyalar orqali aniqlanadi. Aynan shu xos funktsiyalar Furye qatorining bazis funktsiyalari sifatida xizmat qiladi.

Boshlang'ich shart esa Furye qatori yordamida yoyiladi. Qatorning koeffitsiyentlari ortogonallik shartlaridan foydalanib aniqlanadi. Natijada umumiy yechim har bir xos funktsiyaning vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalovchi hadlar yig'indisi shaklida hosil qilinadi. Agar qator yaqinlashish shartlarini qanoatlantirsa, hosil qilingan yechim berilgan chegaraviy masalaning yagona analitik yechimi bo'ladi.

Furye qatori yordamida qurilgan yechimlar issiqlik tenglamasi, to'lqin tenglamasi va Laplas tenglamasi kabi matematik fizikaning klassik masalalarida keng qo'llaniladi. Ushbu usul nafaqat nazariy tadqiqotlarda, balki mexanika, qurilish, elektrotexnika, geofizika, aerodinamika va raqamli modellash sohalarda ham muhim amaliy ahamiyat kasb etadi.

Furye usulining asosiy afzalligi shundaki, murakkab fizik jarayonlarni oddiy elementar funktsiyalar orqali ifodalash imkonini beradi. Bundan tashqari, usulning aniqligi yuqori bo'lib, sonli hisoblash algoritmlarini ishlab chiqishda ham nazariy asos vazifasini bajaradi.

Furye qatori (Fourier series) yordamida differensial tenglamalarni yechish — bu murakkab davriy jarayonlarni oddiyroq trigonometrik funktsiyalar yig'indisi orqali ifodalashga asoslangan kuchli matematik usuldir.

Quyida ushbu usulning umumiy algoritmi va qo'llanilishi keltirilgan.

1. Furiye qatorining ta'rifi

Agar $f(x)$ funksiya $[-L, L]$ oraliqda davriy bo'lsa, u quyidagi qator ko'rinishida yoziladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Bu yerda Furiye koeffitsiyentlari:

- $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$
- $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$
- $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

2. Differensial tenglamani yechish algoritmi Differensial tenglamani (masalan, issiqlik o'tkazuvchanlik yoki to'lqin tenglamasi) Furiye qatori orqali yechish uchun odatda quyidagi qadamlar bajariladi:

Chegaraviy shartlarni aniqlash: Tenglama berilgan sohadagi chegaraviy shartlar (Dirixle, Neyman yoki aralash) qatorning bazisini (sin yoki cos) tanlashga yordam beradi.

Yechimni qator ko'rinishida izlash: Izlanayotgan $u(x, t)$ funksiyani koeffitsiyentlari vaqtga bog'liq bo'lgan qator deb faraz qilinadi:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x)$$

Tenglamaga qo'yish: Ushbu qatorni berilgan differensial tenglamaga qo'yib, har bir had uchun oddiy differensial tenglamalar (ODE) tizimi hosil qilinadi.

Koeffitsiyentlarni topish: Boshlang'ich shartlardan foydalanib, $T_n(t)$ funksiyalar topiladi.

Yig'indini qurish: Topilgan $T_n(t)$ larni boshlang'ich qatorga qaytarib qo'yib, umumiy yechim aniqlanadi.

3. Asosiy qo'llanilish sohalari

- **Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi:** $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Bu yerda Furiye qatori orqali vaqt o'tishi bilan issiqlikning taqsimlanishi aniqlanadi.
- **To'lqin tenglamasi:** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Torning tebranishini tahlil qilishda (masalan, torli cholg'u asboblarning tovushi).
- **Laplas tenglamasi:** Potensiallar nazariyasi va elektrostatikada maydon taqsimotini hisoblashda.

Ushbu usul juda samarali, ammo ba'zi qiyinchiliklari ham bor:

- Keskin o'zgarishlar: Agar jarayon juda keskin uzilishlarga ega bo'lsa (masalan, to'satdan urilgan zarba), Furiye qatori uzilish joyida kichik "tebranishlar" hosil qilishi mumkin (bu Gibbs effekti deb ataladi).
- Chegaralar: Usul ishlaydi, agar biz jarayonning qayerda boshlanib, qayerda tugashini aniq bilsak.

Xulosa

Furiye qatori yordamida yechimni qurish matematik fizika masalalarini analitik yechishning eng muhim usullaridan biridir. Ushbu usul yordamida xususiy hosilali differensial tenglamalar samarali ravishda yechiladi hamda fizik jarayonlarning matematik modellari aniq tavsiflanadi. Furiye qatorining ortogonallik xossasi va xos funksiyalar tizimidan foydalanish yechimni sodda va ixcham shaklda ifodalash imkonini beradi. Shu sababli Furiye usuli zamonaviy amaliy matematika, fizika va muhandislik fanlarida keng qo'llanilayotgan fundamental metodlardan biri hisoblanadi.

Furiye qatorlari bizga murakkablik ortidagi tartibni ko'rishga yordam beradigan "matematik ko'zoynak"dir. U muhandislikdan tortib musiqa texnologiyalarigacha bo'lgan barcha sohalarida qo'llaniladi.

- Murakkab tizimlarni modellashtirishda Furiye usulini zamonaviy kompyuter algoritmlari bilan birga qo'llash tavsiya etiladi.
- Talabalarga bu usulni tushuntirishda uni musiqa (tovush signallari) misolida ko'rsatish eng qulay yo'ldir, chunki quloq har bir notani (garmonikalarni) alohida ajratib olishga o'rgangan.

Adabiyotlar

1. Tixonov, A. N., & Samarskiy, A. A. (2004). Matematik fizika tenglamalari. (O'zbek va rus tillarida nashrlari mavjud). — Ushbu kitob sohadagi fundamental darslik hisoblanib, Furiye usulining nazariy asoslari va chegaraviy masalalarni yechish metodlarini eng mukammal yoritib beradi.
2. Xushvaqtov, M. Matematik analiz. (O'quv qo'llanma). — Furiye qatorlari tushunchasining matematik asoslarini, ya'ni funksional qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligini tushunishda yordam beradi.
3. Serov, V. (2017). Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics. Springer International Publishing. — Bu kitob Furiye qatorlari va spektral tahlilning zamonaviy talqinini, shuningdek, ularning fizik masalalarda qo'llanilishini chuqur ilmiy tahlil qiladi.
4. Tsitsas, N. (2015). Fourier Series (Chapter in "Applied Mathematics"). Kallipos, Open Academic Editions. — Amaliy matematika nuqtai nazaridan Furiye

qatorlarining signallar va davriy funksiyalar bilan bog'liqligini sodda va tushunarli bayon etadi.

5. Weisstein, E. W. "Fourier Series". MathWorld—A Wolfram Resource. — Furiye qatorlarining turli funksiyalar uchun shakllarini va hisoblash metodlarini vizual hamda qisqacha izohlovchi onlayn resurs.

6. Vladimirov, V. S. Matematik fizika tenglamalari uchun masalalar to'plami. — Furiye usulini mustaqil ravishda mashq qilish va amaliy masalalarni yechish uchun zarur bo'lgan misollarni o'z ichiga oladi.

7. Kornyshev, A. A. Fourier Series and Integrals: How to Derive a Formula. — Furiye formulalarining kelib chiqishi va ularning intuitiv ma'nosiga urg'u berilgan ilmiy nashr.