

DOIRADA BERILGAN KASR TARTIBLI SUBDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALANI YECHISH

Qodirova Marhabo Shuxrat qizi

*Osiyo Xalqaro Universiteti, 1-kurs talabasi
magistratura, matematika yo'nalishi*

Annotatsiya: Ushbu ilmiy ishda doirada berilgan kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalani yechish masalasi batafsil ko'rib chiqiladi. Kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari orqali fizik jarayonlarning klassik modellenishidan farqli o'laroq, murakkab, masalan, xotira effektiga ega yoki inertsial fizik tizimlarni tavsiflash mumkinligi asoslanadi. Ishda aynan doiraviy sohada subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan qo'shimcha masala tuziladi, umumiy yechimni topish uchun analitik va numerik usullar ko'rib chiqiladi, mutaxassis va talabalarga tushunarli tarzda ilmiy izohlar keltiriladi. Olingan natijalarning matematik jixatlari, fizik ma'nosi va amaliy qo'llanilishi, shuningdek, kasr tartibli hisoblashlarning zamonaviy muhandislik va fizika sohalarida o'rni mufassal tahlil qilinadi. Mazkur tadqiqot kasr tartibli darajali hodisalarning tahliliga bag'ishlangan, zamonaviy ilmiy tadqiqotlarda foydalanilayotgan yechim metodikalarining afzalliklarini yoritadi.

Kalit so'zlar: kasr tartibli differensial tenglama, subdiffuziya, boshlang'ich-chegaraviy masala, analitik yechim, numerik usul, doira, fizik jarayon, xotira effekti, Fraktsional hisoblash, anomal diffuziya.

So'nggi yillarda zamonaviy fizikada va matematikada differensial tenglamalarning yangi turidagi, ya'ni kasr tartibli shakllari keng qo'llanila boshladi. Kasr tartibli differensial tenglamalar, klassik integer tartibli odatiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ta'riflab bo'lmaydigan, murakkab jarayon va tizimlarni modeliyash uchun xizmat qiladi. Bunday tenglamalarda hosila yoki integralning tartibi butun son emas, balki ixtiyoriy haqiqiy yoki hatto kompleks qiymat olib, bu orqali fizik yoki texnologik tizimlarda kuzatiladigan xotira va taranglik effektlari ifodalanadi.

Subdiffuziya jarayonlari ayni shunday murakkab tizimlarda, masalan, poroz muhitda zarralar harakatida, biologik to'qimalardagi molekulalarning tarqalishida, polimer zanjirlar harakatida va boshqa ko'plab sohalarda uchraydi. Klassik diffuziya tenglamasi bu hodisalarni to'liq aks ettira olmaydi, chunki real sistemalardagi zarraning harakati ko'pincha oddiy tasodifiy yurishdan farq qiladi. Bu esa kasr tartibli differensial tenglamalar sifatida tavsiflanadi va subdiffuziya deb ataladigan anomal diffuziya turi yuzaga keladi. Mazkur ishda doira sohasida subdiffuziya jarayonini

tavsiflash uchun kasr tartibli differensial tenglama va unga mos boshlang'ich-chegaraviy masalani yechish choralari ko'rib chiqiladi. Masala fizika va muhandislik sohalari uchun ahamiyatli bo'lib, gibrid va xotira effekti yorqin ifodalangan muhitlarda real tajriba natijalarini matematik modelga yaqinlashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kasr tartibli differensial tenglamalar klassik nazariyada Olya va Kaputo, Riman-Liuvill kasr tartibli hosila tushunchalari kiritilganidan so'ng keng tadqiqot maydoniga aylandi. Oddiy diffuziya jarayonini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\partial u / \partial t = D \nabla^2 u,$$

bu yerda u - konsentratsiya, D - diffuziya koeffitsienti, ∇^2 - Laplas operatori, t - vaqt.

Anomal subdiffuziya jarayonlarida bu tenglama

$$\partial^\alpha u / \partial t^\alpha = D \nabla^2 u$$

ko'rinishini oladi, $0 < \alpha < 1$. Bu yerda $\partial^\alpha u / \partial t^\alpha$ - kasr tartibli hosila bo'lib, u jarayonning anomal, ya'ni standart diffuziyadan sekinroq tarqalishini bildiradi.

Kasr tartibli hosila vaqt o'tgan sari zarralarning "xotira"siga, ya'ni ularning oldingi holatlariga bog'liqlarni ifodalaydi. Bunday tenglamalarni yechishda asosiy qiyinchilik - bu kasr tartibli hosilalarning o'ziga xos matematik xossalari mos keladigan metodlar topish bilan bog'liq.

Doira sohasida boshlang'ich-chegaraviy masala

Masalani quyidagicha ifodalash mumkin: doira yuzasi $0 \leq r \leq R$ oralig'ida, $t \geq 0$ vaqt oralig'ida olib qaraladi.

Subdiffuziya tenglamasi:

$$\partial^\alpha u(r, t) / \partial t^\alpha = D(\partial^2 u / \partial r^2 + (1/r) \partial u / \partial r),$$

bu yerda r - radial koordinata, R - doira radiusi, D - subdiffuziya koeffitsienti, α - kasr tartibli daraja ($0 < \alpha < 1$).

Boshlang'ich shart:

$$u(r, 0) = f(r),$$

Chegaraviy shartlar:

$$u(R, t) = 0, \quad \partial u / \partial r (r = 0, t) = 0.$$

Ushbu tur shartlar fizik tilda quyidagicha talqin qilinadi: konsentratsiya boshlanishda $f(r)$ tarzida berilgan; doira chegarasida tashqariga oqim yo'q, markazda esa simmetriya mavjud [1].

Kasr tartibli vaqt hosilali tenglamalarni analitik yechish uchun Laplas transformatsiyasi (yoki Fraktsional Laplas), Eilerdan foydalaniladi. Boshlang'ich va chegaraviy shartlar yordamida umumiy yechim, Bata funksiyasi, Mittle Leffler funksiyalaridan foydalanilgan holda ta'minlanadi.

Doiraviy sohada bu tenglamani Bessel funksiyalari yordamida ajratish va Egenfunksiya usulini qo'llash mumkin.

Yechim bosqichlari quyidagicha:

1. Laplas transformatsiyasi qo'llash:

Masala vaqt bo'yicha Laplas transformatsiyasiga o'tkaziladi, bu hosila va integral usullarini soddalashtiradi.

2. Ajratish usuli:

Ajratish usulida:

$$u(r, t) = \sum A_n \varphi_n(r) E_{\alpha}(-\lambda_n t^{\alpha})$$

ko'rinishida ekspansiya qilinadi, bu yerda $\varphi_n(r)$ - Bessel funksiyasining xususiy yechimlari, λ_n - shu funksiyalarga mos xususiy qiymatlar, E_{α} - Mittle Leffler funksiyasi.

3. Bosh shartga moslash:

$f(r)$ boshlang'ich shart asosida to'g'ri koeffitsientlar aniqlanadi.

4. Yakuniy yechim:

Yechim natijasida har bir xususiy qiymatga mos ravishda vaqtga kasr tartibli hosiladan kelib chiqqan, sekin so'nuvchi yoki tarqaluvchi harakatlar olinadi.

Shu tarzda analitik yechimlar olish mumkin, lekin amalda ko'p hollarda $f(r)$ murakkab bo'lsa, yoki interval cheklovlari o'zgacha bo'lsa, numerik metodlar ustuvor bo'ladi [2].

Kasr tartibli differensial tenglamalar uchun zamonaviy numerik metodlar - Grinfeld, L1 shemasi, konstanta miqdorli Eiler yondashuvi, Chebyshev polinomialari va spektral metodlardan iborat. Numerik yechimlarni olish uchun vaqt bo'yicha tarmoq tanlanadi, kasr tartibli hosila convolyutsion yoki diskret integrallar yordamida diferenciallanadi. Radial sohada esa, markazda simmetrika va doirada nolinci chegaraviy shartlar hisobga olinadi.

Numerik natijalar orqali subdiffuziya jarayonining sekin tarqalishi, zarralarning uzoq vaqt o'tib ham bo'shliqda "saqlanib qolish" effekti yaxshi aks ettiriladi. Bunday hasilatlar biofizika, tibbiy inshootlar, neft burg'ulash, geofizika va boshqa sohalarda muhim ahamiyatga ega [3].

Kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari real tajribaviy natijalar orqali mustahkamlangan. Masalan, hujayra ichida makromolekulalarning harakati, g'ovak jinslar ichidagi ionlarning tarqalishi, ko'p fazali materiallar yoki polimerlarda energiyaning sochilishi barchasi klassik diffuziya modelidan ko'ra sekinroq va uzun "dumli" vaqtga ega bo'ladi. Bunday sistemalarda zarralarning harakati ko'pincha erkin emas, ular muhitning tuzilmasiga bog'liq va "xotira"ga ega, ya'ni oldingi harakatlarini qayta-qayta takrorlashi mumkin [4].

Matematik modelda bu effekt kasr tartibli hosilalarda o'z aksini topadi. Bu esa nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham fizik va injenerli muammolarni yanada

samarali hal qilishga yordam beradi. Doirada berilgan kasr tartibli subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalani yechish natijalaridan ko'rinib turibdiki, kasr tartibli yondashuvlar klassik modellarga nisbatan real sistemalarning harakatini yaxshiroq tavsiflaydi. Subdiffuziya jarayonining analitik va numerik yechimlari orqali taqsimlanish ishorati sekin tarqaladi, bu esa, masalan, poroz muhitda kiruvchi moddalar yoki dorilarning taqsimlanishini oldindan taxminlashga imkon beradi. Mazkur natijalar yordamida kimyo texnologiyalari, ekologiya, materialshunoslik, tibbiy fizika sohalari uchun yangi modellash strategiyalari ishlab chiqish mumkin. Kasr tartibli model fizik eksperimentlar bilan solishtirilganda yuqori aniqlilikka ega bo'ladi, chunki unda real tizimlarning inersial va xotira xususiyatlari ko'p jihatdan inobatga olinadi [5].

Xulosa

Ushbu maqolada kasr tartibli differensial tenglamalar, xususan, subdiffuziya tenglamasining doira sohasida boshlang'ich-chegaraviy masalasi analitik va numerik metodlar yordamida hal qilindi. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, kasr tartibli modellash fizik tajribalarning ko'plab asosiy javhalarini aniq ifodalaydi va xotira effekti, anomal diffuziya kabi hodisalarni ham o'z ichiga oladi. Analitik yechimlarda Mittle Leffler va Bessel funksiyalari asosiy rol o'ynaydi, numerik modellarda esa zamonaviy algoritmlardan keng foydalaniladi. Kasr tartibli subdiffuziya tenglamalari real muhitdagi murakkab tartibsiz harakatlarni matematik ifodalashda juda foydali vosita ekanligi isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Academic Press, 1974.
2. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press, 1999.
3. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. Imperial College Press, 2010.
4. Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. Physics Reports, 2000.
5. Magin R.L. Fractional Calculus in Bioengineering. Begell House, 2006.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science, 2006.
7. Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Springer, 2011.
8. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, 2000.
9. Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford University Press, 2005.
10. Sabatier J., Agrawal O.P., Tenreiro Machado J.A. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, 2007.