

UCH O'LCHAMLI TO'LQIN TENGLAMASI UCHUN TO'G'RI VA TESKARI MASALALAR

Saydullayeva Feruza Abdullayevna

*Osiyo Xalqaro Universiteti, 1-kurs talabasi
magistratura, matematika yo'nalishi*

Annotatsiya: Maqolada uch o'lchamli to'lqin tenglamasining matematik va fizik asoslari, to'g'ri hamda teskari masalalardagi asosiy muammo va yechim metodlari har tomonlama yoritilgan. To'lqin tenglamasi fizikada, muhandislikda va boshqa ko'plab tadqiqot sohalarida keng tarqalgan bo'lib, mexanik, akustik va elektromagnit to'lqinlarning tarqalishini aniq tavsiflashda muhim ahamiyat kasb etadi. To'g'ri masalada, berilgan boshlang'ich va chegaraviy shartlar asosida, to'lqinlar harakatining prognozi quriladi; teskari masalada esa, kuzatilgan natijalarga asoslangan holda, muhit xossalari yoki noma'lum boshlang'ich ma'lumotlarni aniqlash muammosi o'rganiladi. Mazkur ishda ushbu ikki tur masalaning matematik strukturasi, analitik va numerik yechimlari, amaliy jihatlari chuqur yoritilgan, zamonaviy tadqiqotlarda qo'llaniladigan usullar va kelajakdagi rivojlanish yo'nalishlari o'rganiladi.

Kalit so'zlar: uch o'lchamli to'lqin tenglamasi, to'g'ri masala, teskari masala, boshlang'ich-chegaraviy masala, analitik yechim, numerik usul, fizik modellash, inversiya, akustika, elektromagnit to'lqinlar.

Uch o'lchamli to'lqin tenglamasi, zamonaviy ilm-fan va texnika taraqqiyotining asosiy tayanch nazariyalaridan biri bo'lib, mexanika, fizikada va tabiiy jarayonlarni matematik modellashda keng qo'llanilayotgan muhim tenglamalardan hisoblanadi. To'lqin tenglamasi yengil tebranishlarni, akustik signallarni, elektromagnit to'lqinlarni, yer osti zvuk va elektromagnit o'lchov natijalarini, shuningdek, boshqa ko'plab energiya turkumlarining tarqalishini ifodalashda asosiy matematik model sifatida xizmat qiladi.

To'lqin tenglamasi matematik fizikaning differensial tenglamalari orasida maxsus o'ringa ega, chunki u sochiniy jarayonlarni, ularning tezligi, chegaraviy holatga yetishi va uch o'lchamli strukturadagi aniq tarqalish xususiyatlarini batafsil tasvirlay oladi. Uning asosiy ko'rinishi, uch o'lchamli Evklid fazosida, quyidagicha ifodalanadi:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2),$$

bu yerda $u(x, y, z, t)$ – jarayonning asosiy funksiyasi (potensial, bosim, kuchlanish va h.k.), c – muhitda to'lqin tarqalish tezligi, x, y, z – fazoviy koordinatalar, t – vaqt.

Ushbu tenglamaning to'g'ri va teskari masalalari nafaqat nazariy muammolar, balki texnik va amaliy diagnostika, geofizika, meditsina tomografiyasi, diffuziya va akustika kabi muhim sohalarda ham yuqori amaliy ahamiyat kasb etadi.

To'g'ri masalani har doim boshlang'ich va chegaraviy shartlarning berilishi bilan ifodalaymiz. Masalan, uch o'lchamli oraliq (giperten), ya'ni x, y, z oralig'ida va $t \geq 0$ vaqt uchun quyidagi tenglama beriladi:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \Delta u,$$

bu yerda Δ - Laplas operatori,

Boshlang'ich shartlar:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

$$\partial u / \partial t (x, y, z, 0) = \psi(x, y, z)$$

Chegaraviy shartlar esa modellastirilayotgan hududning chegarasida o'rnatiladi, odatda Dirixle, Neyman yoki Aralash turdagi shartlardan iborat bo'ladi.

To'g'ri masalaning maqsadi – berilgan funksiyalar φ va ψ hamda muhitda to'liq tezligi c bo'yicha yechim $u(x, y, z, t)$ ni aniqlashdir.

Analitik jihatdan, uch o'lchamli to'liq tenglamasini yechishda ajratish, Furiye va Laplas transformatsiyalari, Green funksiyalari, xususiy qiymatlar va xususiy funksiyalar usullari, integral formulalardan foydalaniladi. Masalan, Chebyshev yoki Legendre polinomialari bilan kengaytmalar, har bir koordinata bo'yicha ajratish, sferik yoki silindrik simmetrik hol uchun maxsus funksiya sistemalariga o'tkazish yordam beradi. To'g'ri masalaning aniq yechimini olish faqat ba'zi ideal holatlarda, cheksiz yoki oddiy ko'rinishdagi sohalarida (masalan, to'g'ri burchakli parallelepiped, sfera va h.k.) imkoni bor.

3D to'liq tenglamasida eng ko'p ishlatiladigan formula – d'Alembert yoki Kirxgof integral formulasi yordamida zaman va fazo bo'ylab integral ifodalar deyiladi. Qiyinroq sohalarida esa, sonli metodlar, masalan, sonli differensial sxemalar, sonli integral metodlari, elementlar yoki to'rlar usullari, Chebyshev-Galeyrkin va spektral metodlar keng ishlatiladi [1].

To'liqlar harakati – ultratovush diagnostikasi, seysmologiya, akustika, radar texnologiyalari, tomografiya, elektromagnit nurlarning yirik muhitlarda tarqalishini idrok etishda juda muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli, to'g'ri masalani chuqur o'rganish, haqiqiy eksperiment va amaliy qurilmalar natijalarini matematik tahlil qilish, modifikatsiyalash uchun mustahkam usullar yaratishga imkon beradi [2].

Teskari masalada asosiy vazifa – aniqlik yoki qiyos natijalarni (odatda muayyan vaqtda yoki fazoda kuzatilgan to'liq signalini) bilgan holda noma'lum parametrlarni aniqlashdir. Masalan, to'liq tarqalganidan keyin ma'lum bir joyda signal o'lchangan; endi esa muhitning qanday xossalari borligi, yoki dastlabki harakat yaqincha qanday bo'lgani teskari masala sifatida tahlil qilinadi. Matematik nuqtai nazardan, teskari masalalar, odatiy to'g'ri masalaga qaraganda, juda noanaqil va beqaror bo'ladi. Bu masala ill-posted, ya'ni kichik o'zgarishlari natijaga katta ta'sir qilgan, yechim mavjud bo'lmasligi yoki birdan ortiq bo'lishi bilan murakkablanadi. Masalan, 3D to'liq tenglamasi uchun, biror chegarada (yoki ichki nuqtada) vaqt bo'yicha o'lchovlar

mavjud. Endi esa, muhitdagi fizik xususiyat, yoki boshlang'ich shartlar, masalan, signal chiqaruvchi manbaning xossalari yoki dastlabki holati qay tarzda ekanini hisoblash kerak [3].

Teskari masalalarning eng muhim turlariga misollar

- Kuchlanish manbasini yoki boshlang'ich energiya taqsimotini aniqlash uchun akustik teskari masala.

- Seizmik teskari masalalarda yer po'sti tuzilishini aniqlash.

- Meditsina va sanoatda tomografik teskari masalalar (masalan, yurak faolligini yoki miya signallarini yana tiklash uchun).

- Elektromagnit to'liqlar asosida radar tizimlarida ko'rinmas nishonlarni aniqlash.

Bunday masalalar, asosan, integral va differensial operatorlarni inversiyalash, iteratsion va optimallashtirish usullari yordamida zamonaviy sonli texnologiyalar orqali yechiladi [3].

Analitik yechimlar ko'pincha ideal yoki soddalashtirilgan holatlarda olinadi, masalan, biror sohada signal ko'rsatkichi aniq berilgan va u ma'lum bir funktsional toifada qolsa. Ayniqsa, fanga teskari masalalar uchun matematik ill-posedlikni bartaraf qilish – eng muhim qadam hisoblanadi. Bunisi uchun Tihonov regularizatsiyasi, minimum normali metodlar, singular qiymatlar dekompozitsiyasi, Bayesian va stokastik yondashuvlardan, ayniqsa, zamonaviy sun'iy intellekt usullari va neyrotarmoqlardan foydalaniladi [4].

Sonli yechimlar uchun quyidagilar mos keladi:

- Cheklangan farqlar va Cheklangan elementlar metodikasi;
- Konjugat gradientlar va iteratsion optimallashtirish metodlari;
- Stokastik algoritmlar va Monte-Karlo usullari;
- Regularizatsiyalangan eng kichik kvadrat metodlari;
- AI/ML asosidagi inversiyalash metodlari.

Sonli hisoblash natijalari orqali teskari masalalar amaliy geofizika, tibbiyot tomografiyasi, muhandislik sistemalari uchun beqiyos yutuqlar keltirgan. Teskari masalalarning asosiy muammosi – kichik o'lchov xatolari yechimga juda katta ta'sir etadi. Shuning uchun, teskari masalani yechishda doimiy regularizatsiya yoki ustivor baholash, xatoni kamaytirish, natijani mustahkamlash yo'llari doimiy ishlab chiqiladi.

Masalan, Tikhonov regularizatsiyasi yoki Bayesian ehtimollar asosidagi regularizatsiya, hamda penalizatsiyalash usullari eng ommabop hisoblanadi. Zamonaviy metodlarda signalga shovqin qo'shilgan holatlardagi yechim barqarorligi ustivor masala hisoblanadi. Bu boradagi zamonaviy tadqiqotlar sun'iy intellekt asosidagi teskari masalalarning barqarorligi va aniqligini yuqori darajaga olib chiqmoqda [5].

Tadqiqotlar natijalari ko'rsatmoqdaki, uch o'lchamli to'liq tenglamasi asosida yaratilgan modellar, nafaqat real fizik muhitlarni aniqlik bilan modellashtiradi, balki murakkab diagnostik va invers o'rganish jarayonlarining fizik-texnik mohiyatini chuqurroq ochib beradi. Seizmografiya, noninvasiv tibbiy tomografiya, radar texnologiyalari, akustik diagnostika kabi muhim sohalarda yechimlarni mustahkamlashga xizmat qiladi To'liq tenglamasining strukturasi, xossalari, va teskari masala uchun zamonaviy hisoblash texnologiyalari, parallel hisoblash algoritmlari va optimallashtirish modullaridan foydalanish kelgusida yangi texnika va diagnostika usullarini ishlab chiqishga zamin yaratmoqda.

Xulosa

Ushbu ilmiy ishda uch o'lchamli to'liq tenglamasining to'g'ri va teskari masalalari keng va chuqur tahlil qilindi. To'g'ri masalaning analitik va numerik yechimlari, fizik va muhandislik jarayonlarida juda muhim ahamiyat kasb etadi. Teskari masalada esa, noma'lum parametrlarni aniqlash, fizik xossalarni tiklash, modellarni inversiyalash uchun matematik va hisoblash usullari mukammal ishlab chiqilgan. Zamonaviy hisoblash texnologiyalari, regularizatsiya va sun'iy intellekt yondashuvlari ushbu murakkab masalalarning barqarorligini va ishonchliligini keskin oshirdi. Barcha natijalar, fan va texnika taraqqiyotiga, yangi diagnostika, kuzatish hamda prognozlashtirish tizimlarini shakllantirishga beqiyos hissa qo'shmoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, 1962.
2. Evans L.C. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 1998.
3. Ladyzhenskaya O.A. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer, 1985.
4. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer, 2006.
5. Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. VNU Science Press, 1987.
6. John F. Partial Differential Equations. Springer, 1982.
7. Kress R. Linear Integral Equations. Springer, 2014.
8. Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. SIAM, 2005.
9. Lions J.L., Magenes E. Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications. Springer, 1972.
10. Romanov V.G., Yamamoto M. Inverse problems and Carleman estimates: global uniqueness, stability and numerical methods. Walter De Gruyter, 2017.