

VEKTOR USULLARI YORDAMIDA FAZOVIIY GEOMETRIYA MASALALARINI YECHISH

Voxidov Abduqodirxon Xabibxon o'g'li

Matematika yo'nalishi 1- kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Matematika kafedrasi katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada fazoviy geometriya masalalarini vektor algebra usullari yordamida yechishning nazariy asoslari va amaliy imkoniyatlari tahlil qilingan. Tadqiqot natijasida fazoviy masalalarni algoritmik shaklda ifodalashga imkon beruvchi yangi matematik yondashuv - mualliflik teoremasi taklif etildi. Ushbu teorema nuqtaning n -o'lchovli fazodagi gipertekislikka bo'lgan masofasini umumiy vektor shaklida aniqlashni ta'minlaydi. Taklif etilgan metod fazoviy modellashtirish, kompyuter grafika, sun'iy intellekt va ta'lim jarayonlarida qo'llash uchun qulay bo'lib, analitik geometriyaning rivojlanishida yangi bosqichni tashkil etadi.

Kalit so'zlar: analitik geometriya, vektor algebra, fazoviy masofa, algoritmik modellashtirish, gipertekislik.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНЫХ МЕТОДОВ

Аннотация: В статье рассмотрены теоретические основы и практические возможности решения задач пространственной геометрии с использованием методов векторной алгебры. В результате исследования предложен новый математический подход - авторская теорема, позволяющая в общем виде вычислять расстояние от точки до гиперплоскости в n -мерном пространстве. Предложенный метод является удобным инструментом для применения в пространственном моделировании, компьютерной графике, системах искусственного интеллекта и образовательных технологиях, открывая новый этап в развитии аналитической геометрии.

Ключевые слова: аналитическая геометрия, векторная алгебра, пространственное расстояние, алгоритмическое моделирование, гиперплоскость.

SOLVING SPATIAL GEOMETRY PROBLEMS USING VECTOR METHODS



Abstract: This article analyzes the theoretical foundations and practical applications of solving spatial geometry problems using vector algebra methods. As a result of the research, a new mathematical approach — an original theorem — has been proposed, providing a general vector expression for determining the distance from a point to a hyperplane in n -dimensional space. The proposed method is applicable in spatial modeling, computer graphics, artificial intelligence, and educational processes, marking a new stage in the development of analytic geometry.

Keywords: analytic geometry, vector algebra, spatial distance, algorithmic modeling, hyperplane.

Zamonaviy matematika fanining eng muhim tarmoqlaridan biri bu analitik geometriya bo'lib, u geometrik shakllar va ularning o'zaro munosabatlarini algebraik tenglamalar orqali ifodalash imkonini beradi. Analitik geometriyaning muhim bo'limi sifatida fazoviy geometriya uch o'lchovli fazoda joylashgan nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik hamda ularning o'zaro joylashuvini o'rganadi. Ushbu yo'nalishda vektor algebra usullarining qo'llanilishi geometrik masalalarni yechishda eng qulay va aniq yondashuvlardan biri sifatida tan olingan.

Fazoviy geometriyada vektor tushunchasi asosiy matematik vosita hisoblanadi. Har qanday fazodagi nuqta koordinatalar tizimi orqali aniqlanadi va bu nuqta bilan bog'langan yo'nalishli kesma vektor deb ataladi. Agar $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, ularning orasidagi vektor:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Vektor algebra yordamida geometrik obyektlarning asosiy xossalari — masofa, burchak, tekislik tenglamasi va hajm kabi kattaliklar algebraik formulalar orqali aniqlanadi.

An'anaviy geometriyada fazoviy masalalarni yechish uchun chizmalar chizish, proyeksiya usullarini qo'llash zarur bo'lgan. Biroq bu yondashuv inson omiliga bog'liq bo'lgani sababli xatolik keltirib chiqarishi, shuningdek, murakkab fazoviy modellarni tahlil qilishda chegaralangan edi. Vektor usuli esa bu kamchiliklarni bartaraf etadi, chunki u barcha geometrik xossalarni sonli (analitik) shaklda ifodalash imkonini beradi. Masalan, ikkita vektor orasidagi burchak quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Bu yerda $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — skalyar ko'paytma, $|\vec{a}|$ va $|\vec{b}|$ esa vektorlarning uzunliklaridir. Shu formula yordamida uch o'lchovli fazoda har qanday yo'nalishli chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash mumkin.

Shuningdek, vektor usuli masofalarni ham soddalik bilan hisoblash imkonini beradi. Masalan, $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

formulasi bilan topiladi. Bu tenglama har qanday fazoviy joylashuv uchun aniq va universal natija beradi.

So'nggi yillarda vektor usullarining qo'llanilishi kompyuter grafika, robototexnika, aerokosmik muhandislik, 3D-modellashtirish va sun'iy intellekt tizimlarida kengaymoqda. Chunki bu sohalarida geometrik shakllarni aniqlash, burish, masshtablash, harakat yo'nalishlarini belgilash kabi jarayonlar to'g'ridan-to'g'ri vektor hisoblariga asoslanadi. Shu boisdan, fazoviy geometriya masalalarini vektor usuli yordamida yechish nafaqat nazariy, balki amaliy ahamiyatga ham ega.

Ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi — fazoviy geometriya masalalarini vektor algebra vositalari yordamida yechishning ilmiy-nazariy asoslarini tahlil qilish, ularni algoritmik shaklga keltirish hamda hisoblash jarayonlarini avtomatlashtirish imkoniyatlarini ko'rsatishdan iboratdir. Maqolada ko'rib chiqilgan yondashuvlar yordamida murakkab geometrik masalalarni soddalashtirish, matematik formulalarni dasturlash muhiti orqali ifodalash va ularni amaliy tahlilga tatbiq etish yo'llari yoritiladi.

Vektor usullarining qo'llanilishi orqali fazoviy geometriya yangi bosqichga ko'tariladi — bu bosqichda geometrik modellar faqat chizma orqali emas, balki analitik tenglamalar tizimi orqali tasvirlanadi. Bu esa ilmiy va texnik sohalarida yuqori aniqlikdagi hisob-kitoblarni amalga oshirish imkonini beradi.

Vektor algebra fazoviy geometriya masalalarini tahlil qilishda eng samarali usul hisoblanadi, chunki u geometrik obyektlarning o'zaro joylashuvini algebraik tilda ifodalaydi. Fazoviy geometriyada nuqta, chiziq va tekislik munosabatlarini vektorlar yordamida ifodalash nafaqat geometrik tahlilni soddalashtiradi, balki masalalarning kompyuter algoritmlarida amalga oshirilishini ham osonlashtiradi.

Har qanday nuqta $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ uchun bog'lovchi vektor:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

bo'ladi. Vektor uzunligi (masofa) esa:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

o'rinishda topiladi. Bu vektor yordamida geometrik obyektlarning fazodagi o'zaro munosabati to'liq aniqlanadi.

Vektorlar orasidagi burchak skalyar ko'paytma orqali topiladi:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Bu formula fazoviy tahlilda muhim o'rin tutadi, chunki u fazodagi ikkita yo'nalish orasidagi munosabatni o'lchash imkonini beradi.

Tekislik va chiziq o'rtasidagi munosabatlarni ham vektor shaklida ifodalash mumkin. Tekislik tenglamasi:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $\vec{n} = (A, B, C)$ — tekislikning normal vektori. Agar $P(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan ushbu tekislikkacha bo'lgan masofa topilsa, u holda:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

bo'ladi. Bu formula klassik hisoblash uchun ishlatiladi, biroq u faqat nuqta–tekislik holatida qo'llaniladi. Endi biz yangi umumlashgan teoremani kiritamiz.

Teorema: Agar fazoviy sohada $P(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va vektorlar sistemasidan hosil bo'lgan yo'nalishlar to'plami $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ berilgan bo'lsa, unda ushbu nuqtaning vektor yo'nalishli k -o'lchovli fazoviy gipertekislikka (hiperplane) bo'lgan masofasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$d_k = \frac{|(\vec{n}_k, \vec{r}_0) - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^k n_i^2}}$$

bu yerda $\vec{n}_k$ — gipertekislikning normal vektori, c — gipertekislikning ozod hadini bildiradi.

Agar $k = 2$ bo'lsa, u holda formula oddiy tekislik uchun:

$$d_2 = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ko'rinishga keladi. Shunday qilib, klassik formula ushbu umumiy teoremaning xususiy holi sifatida qaraladi.

Isbot

Fazoviy fazoda k -o'lchovli gipertekislik umumiy ko'rinishda:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k = c$$

tenglama bilan beriladi. Nuqta $P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ ushbu fazoda joylashgan bo'lsin. Shunda ushbu nuqtadan gipertekislikkacha bo'lgan masofa d_k — bu nuqtaning normal yo'nalish bo'yicha proyeksiyasining moduliga teng bo'ladi:

$$d_k = \frac{|n_1 x_1^0 + n_2 x_2^0 + \dots + n_k x_k^0 - c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2}}$$

Demak, d_k nuqta bilan gipertekislik orasidagi eng qisqa masofa bo'ladi. Agar o'lchov $k = 3$ bo'lsa, bu natija fazoviy tekislik uchun yuqorida keltirilgan formula bilan to'liq mos keladi. Shu tariqa, teorema isbotlandi. ■

Teoremaning amaliy natijasi

Ushbu yangi teorema fazoviy masofani hisoblash formulasini yuqori o'lchovli fazolarga umumlashtiradi.

Endilikda 3D modellar bilan bir qatorda, 4D yoki n-o'lchovli fazoviy modellar (masalan, fizik modellar, sun'iy intellektidagi ko'p o'lchovli fazolar)da ham aniqlik bilan masofa, burchak va proyeksiyalarni topish imkonini beradi.

Bu yondashuv matematikaning analitik geometriya bo'limini vektorli algoritmik geometriya bosqichiga olib chiqadi. Ilmiy jihatdan yangilik shundaki, bu formula:

- klassik Evklid masofasining umumlashgan shaklini beradi;
- analitik yechimlarni kompyuter algebra tizimlariga to'g'ridan-to'g'ri tatbiq qilish imkonini yaratadi;
- vektor ko'rinishli hisoblashlar uchun algoritmik modellashtirishni ta'minlaydi.

Numerik tekshirish

Agar $P(2,1,3,4)$ nuqta va $2x - y + 2z + w - 5 = 0$ 4-o'lchovli gipertekislik berilgan bo'lsa, unda:

$$d_4 = \frac{|2(2) - 1(1) + 2(3) + 1(4) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|4 - 1 + 6 + 4 - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2.53$$

Bu natija teoremaning yuqori o'lchovli fazoda ham to'g'ri ishlashini tasdiqlaydi.

Xulosa

Fazoviy geometriya masalalarini vektor yordamida yechish tahlil qilindi. Vektor yordamida ishlashning umumiy teoremasi kiritildi. Bu fazoviy geometriya masalalarini yuqori aniqlikda yechishga yordam beradi va sun'iy intellekt, analitik yechimlarni komputer tizimlariga tatbiq qilishga yordam beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Xolmatov A. M. *Analitik geometriya nazariyasi va amaliyotida vektor metodlari*. – Toshkent: TDPU nashriyoti, 2022.
2. Anton H. *Elementary Linear Algebra*. – 12th Edition. – New York: John Wiley & Sons, 2020. DOI: 10.1002/9781119611232
3. Lay D. C., Lay S. R., McDonald J. J. *Linear Algebra and Its Applications*. – Pearson, 2023. ISBN 978-0-13-751007-3.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). NUQTADAN TO'G'RI CHIZIQQACHA BO'LGAN MASOFA. IKKI TO'G'RI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI VA ULARNI AMALIYOTGA TADBIQI. B

THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).

7. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI VA ULARNI AMALIYOTGA TADBIQI. B THEORETICAL ASPECTS IN THE FORMATION OF PEDAGOGICAL SCIENCES (T. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
8. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). TEKISLIKDAGI PERSPEKTIV-AFFIN MOSLIKNING O'ZIGA XOS XUSUSIYATLARI. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.