

O'RTACHA KVADRATIK XATOLIK FUNKSIYASI

Ilmiy rahbar: Tojimamatov Israil Nurmatovich

Farg'ona davlat universiteti Amaliy matematika va

informatika kafedrasi katta o'qituvchisi

israiltojiamamatov@gmail.com

Talaba: Abdusattorova Mohigul

Farg'ona davlat universiteti Amaliy

Matematika fakulteti 3-bosqich talabasi

Mohigulabdsattorova50@gmail.com

Kalit so'zlar: *O'rtacha kvadratik xatolik, Prognozlash aniqligi, Model xatolik darajasi, Statistik baholash metodi*

Annotasiya: *O'rtacha kvadratik xatolik funksiyasi model natijalarining aniqligini baholashda keng qo'llaniladi. Ushbu funksiya real va prognoz qilingan qiymatlar o'rtasidagi farqni kvadrat ko'rinishda o'lchaydi. MSE qiymati qanchalik kichik bo'lsa, model shunchalik aniq hisoblanadi. Tadqiqotda ushbu ko'rsatkichning amaliy qo'llanilishi va afzalliklari yoritiladi.*

Annotation: *The mean squared error function is widely used to evaluate the accuracy of predictive models. It measures the squared difference between actual and predicted values. A lower MSE indicates a more precise and reliable model. This study highlights the practical applications and advantages of using MSE.*

Аннотация: *Функция среднеквадратичной ошибки широко используется для оценки точности моделей прогнозирования. Она измеряет квадрат разницы между фактическими и предсказанными значениями. Чем меньше значение MSE, тем выше точность модели. В работе раскрываются практическое применение и преимущества данного показателя.*

Hozirgi vaqtda raqamli texnologiyalar, axborot tizimlari va sun'iy intellekt modellari deyarli barcha sohalarida, iqtisodiyotdan tortib tibbiyotgacha, qaror qabul qilishning muhim qismiga aylanib bormoqda. Ushbu tizimlarning qanchalik yaxshi ishlashi, ularning berayotgan bashorat va hisob-kitoblarining ishonchliligiga bog'liq. Shu sababli, modellar natijalarini baholash va ularning aniqligini o'lchash juda muhim masaladir.

Bunday baholashda eng keng qo'llaniladigan va ishonchli ko'rsatkichlardan biri – o'rtacha kvadratik xatolik (Mean Squared Error – MSE) hisoblanadi. Bu ko'rsatkich model bashorati bilan haqiqiy o'lchangan qiymat o'rtasidagi farqni son jihatdan ifodalaydi va modelning umumiy sifatini ko'rsatishga yordam beradi.

O'rtacha kvadratik xatolik nafaqat regressiya tahlilida, balki neyron tarmoqlar va mashina o'rganishning boshqa sohalarida ham asosiy “yo'qotish funksiyasi” sifatida

qo'llaniladi. Unga yana bir muhim jihat – katta xatolarni kichik xatolarga qaraganda ko'proq "jazolashi". Ya'ni, model katta og'ish qilganda, MSE ko'rsatkichi keskin oshadi, bu esa bizni dasturdagi jiddiy kamchiliklardan xabardor qiladi va uni yaxshilash imkoniyatini beradi. Aynan shu sababdan ko'plab tadqiqotchilar MSE dan standart baholash vositasi sifatida foydalanadilar.

O'rtacha kvadratik xatolik ning roli faqatgina modelni baholash bilan cheklanmaydi; u, shuningdek, modelni yaxshilash (optimallashtirish) jarayonida ham asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi. Masalan, neyron tarmoqlarda vaznlarni o'zgartirish aynan shu xatolik ko'rsatkichi minimallashtirilgan holda amalga oshiriladi. Xulosa qilib aytganda, o'rganilayotgan mavzuning ham nazariy, ham amaliy jihati MSE ning mohiyati, ahamiyati va hisoblash usullarini chuqur o'rganishni talab qiladi.

O'rtacha kvadratik xatolik (MSE) amaliyotda juda keng qo'llaniladi va turli sohalaridagi modellarni baholashning asosiy mezonlaridan biridir. Unga yordam so'raganingizda, siz oddiy, tushunarli va ishonchli o'lchovga ega bo'lasiz. MSE ning kuchi uning universal va soddaligidadir – u moderning bashorat qobiliyatini aniq raqamlar bilan ifodalaydi. Shuning uchun ham iqtisodiyotdan tortib tibbiyotgacha, muhandislikdan moliyagacha bo'lgan deyarli barcha sohalarida MSE dan foydalaniladi.

MSE ning eng foydali jihati shundaki, u katta va kichik xatolarni har xil baholaydi. Kichik og'ishlar umumiy xatolikka kam ta'sir qiladi, lekin katta xatolar esa kvadrat shaklida hisoblangani uchun keskin ko'tariladi. Bu aynan biz xohlagan narsa, chunki amaliyotda katta xatolar ko'pincha eng jiddiy oqibatlariga olib keladi. Masalan, inflyatsiyani 0,5% ga noto'g'ri taxmin qilish unchalik dahshatli emas, lekin 10% lik xato butun biznes-rejalarni buzishi mumkin. MSE ana shunday xavfli og'ishlarni tezda aniqlashga yordam beradi.

Yana bir muhim jihat – MSE matematik jihatdan "silliq" va differensiallanuvchi funktsiya bo'lgani uchun kompyuter modellarini optimallashtirishda qulay. Gradient tushish kabi usullar yordamida mashina o'z xatosini minimallashtirish yo'lini topadi. Aynan shu sabab neyron tarmoqlar va regressiya modellarida MSE ni "standart yo'qotish funktsiyasi" sifatida ko'rishimizga sabab bo'ladi. MSE, shuningdek, turli modellarni solishtirishda ham ishonchli o'lchov bo'lib xizmat qiladi. Bir ma'lumotlar to'plamiga bir nechta model (masalan, chiziqli regressiya va neyron tarmoq) qo'llanganda, qaysi biri yaxshiroq ekanligini MSE ko'rsatkichi orqali osongina aniqlash mumkin. Bu uni tadqiqotchilar va amaliyotchilar uchun universal vositaga aylantiradi.

O'rtacha kvadratik xatolik – bu nafaqat qulay matematik formul, balki haqiqiy dunyoda modellarning ishonchliligini sinash va ularni yaxshilashning ishonchli vositasi hisoblanadi.

O'rtacha kvadratik xatolik funksiyasining nazariy asoslari: O'rtacha kvadratik xatolik funksiyasini to'liq anglash uchun uning matematik ta'rifini aniq ifodalash

zarur. Tasavvur qilaylik, bizda tajriba natijasida olingan haqiqiy qiymatlar $y_1, y_2, \dots, y_n$ va ularga mos model prognoz qilgan qiymatlar $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ mavjud. Har bir juftlik uchun xatolik $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Shunda o'rtacha kvadratik xatolik funksiyasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Bu yerda n – kuzatuvlar soni, y_i haqiqiy qiymat, $\hat{y}_i$ – model tomonidan hisoblangan taxminiy qiymatdir. Xatoliklarni kvadratga ko'tarish ikki asosiy maqsadga xizmat qiladi: birinchidan, musbat va manfiy xatoliklar bir-birini bekor qilmasligi ta'minlanadi; ikkinchidan, katta xatoliklar kattaroq og'irlikka ega bo'ladi, bu esa modeldagi yirik og'ishlarni sezgir aks ettiradi.

O'rtacha kvadratik xatolik funksiyasini model xatolik darajasi bilan bog'lash imkoniyati uni amaliy tahlilda yanada foydali qiladi. Agar MSE qiymati katta bo'lsa, bu modelning haqiqiy ma'lumotlardan sezilarli darajada chetga chiqayotganini ko'rsatadi. Aksincha, MSE ning kichik bo'lishi model natijalarining ma'lumotlarga yaqinligini anglatadi. Shu nuqtai nazardan, MSE model sifatini migdoriy ko'rsatkich sifatida ifodalaydi va turli modellarni solishtirishda universal mezon bo'lib xizmat qiladi.

O'rtacha kvadratik xatolik funksiyasi statistik baholash metodi sifatida ham alohida o'rin tutadi. U ko'pincha parametrlarni baholash jarayonida optimallashtiriladigan funksional sifatida qoraladi. Masalan, oddiy chiziqli regressiyada regressiya koeffitsientlari β_0 va β_1 shunday tanlanadiki, MSE minimal bo'lsin. Bunday yondashuv "eng kichik kvadratlar usuli" deb ataladi.

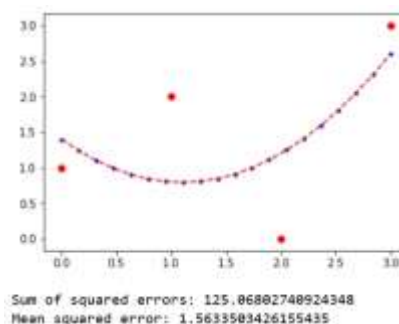
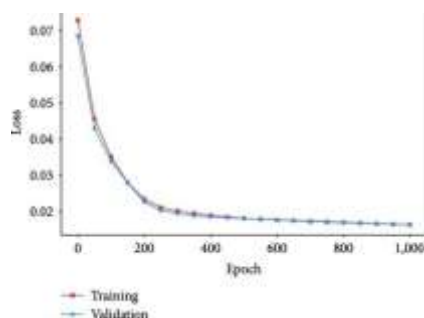
MSE funksiyasi ko'pincha boshqa ko'rsatkichlar bilan bog'liq holda ishlatiladi. Masalan, ildiz ostidagi o'rtacha kvadratik xatolik (Root Mean Squared Error – RMSE) quyidagicha aniqlanadi:

$$RMSE = \sqrt{(MSE)}$$

Yana bir muhim jihat – MSE funksiyasining statistik tavsiflar bilan aloqasidir. Agar tasodifiy xatolik ϵ nol o'rtacha qiymatga va doimiy dispersiyaga ega bo'lsa, u holda MSE ma'lum shartlar ostida ushbu dispersiyaning bahosi sifatida qaralishi mumkin. Dispersiya xatoliklarning o'rtacha kvadratik og'ish darajasini bildirganligi sababli, MSE ham model xatoliklarning umumiy tarqalish intensivligini ifodalaydi.

Xatoliklarni kvadratlash ishlashi

Xatoliklarni kvadratlash funksiyasi modelning prognozlar bilan haqiqiy



qiymatlar orasidagi farqni hisoblashda matematik jihatdan sezgir va og'ishlarga nisbatan adolatli baho beradi. Grafikda ko'rsatilgan egri chiziq $y = (y_i - \hat{y}_i)^2$ funksiyasining geometrik ko'rinishi bo'lib, u shuni ko'rsatadiki: xatolik nolga yaqinlashganda funksiya qiymati juda kichik, lekin og'ish kattalashgani sari bu qiymat tez sur'atlar bilan oshib boradi. Buning mantiqi shundaki, model kichik xatolarni nisbatan yengil jazolaydi, ammo katta xatolar uchun jiddiy javobgarlikni keltirib chiqaradi.

Xatoliklarni kvadratlash funksiyasi modelning prognozlar bilan haqiqiy qiymatlar orasidagi farqni hisoblashda matematik jihatdan sezgir va og'ishlarga nisbatan adolatli baho beradi. Grafikda ko'rsatilgan egri chiziq $y = (y_i - \hat{y}_i)^2$ funksiyasining geometrik ko'rinishi bo'lib, u shuni ko'rsatadiki: xatolik nolga yaqinlashganda funksiya qiymati juda kichik, lekin og'ish kattalashgani sari bu qiymat tez sur'atlar bilan oshib boradi. Buning mantiqi shundaki, model kichik xatolarni nisbatan yengil jazolaydi, ammo katta xatolar uchun jiddiy javobgarlikni keltirib chiqaradi.

Kvadratlashning bu xususiyati modelni o'qitish jarayonida muhim ahamiyatga ega. Katta xatollar MSE qiymatini keskin oshiradi, shuning uchun optimallashtirish algoritmlari (masalan, gradient tushish) birinchi navbatda aynan shu katta og'ishlarni kamaytirishga intiladi. Natijada, regressiya modellarida kvadrat yo'qotish funksiyasidan foydalanish modelning aniqligi va barqarorligini oshirishga yordam beradi.

Grafikdan yana bir muhim jihatni ko'rish mumkin: xatolik qanday yo'nalishda bo'lmasin (musbat yoki manfiy), kvadratlash orqali u har doim musbat qiymatga aylanadi. Bu modelga faqat xatolik kattaligi muhim, uning yo'nalishi emasligini ta'kidlaydi. Amaliy nuqtai nazardan, bu prognozning haqiqiy qiymatdan qancha uzoqlashgani muhim, undan ortiqcha yoki kam baholanganmi emas, degani. Xatoliklarni kvadratlashning yana bir afzalligi — funksiyaning silliq (differensiallanuvchan) bo'lishidadir. Kvadrat funksiya barcha nuqtalarda uzluksiz hosilaga ega, bu esa gradient asosida parametrlarni sozlash imkonini beradi. Ayniqsa, neyron tarmoqlar kabi murakkab tizimlarda bu sillqlik o'quv jarayonining

barqarorligini ta'minlaydi. Shuning uchun ham kvadrat xatolik funksiyasi mashina o'rganishda eng keng qo'llaniladigan yo'qotish funksiyalaridan biridir.

Xulosa

O'rtacha kvadratik xatolik funksiyasi zamonaviy analitika va prognozlash tizimlarida model sifatini baholashning eng asosiy va ishonchli mezonlaridan biri hisoblanadi. Ushbu funksiya haqiqiy qiymatlar bilan prognozlangan natijalar o'rtasidagi farqni kvadrat shaklda o'lchab, katta xatolarga kuchliroq og'irlik berishi orqali modelning haqiqiy samaradorligini aniq aks ettiradi. MSE ning matematik jihatdan soddaligi, differensiallanuvchanligi va optimallashtirish jarayonlarida qulayligi uni nafaqat baholash vositasi, balki model parametrlarini o'rganish va takomillashtirishning muhim elementiga aylantiradi. Tadqiqot davomida ushbu funksiyaning nazariy asoslari, statistik tahlildagi o'rni va amaliy qo'llanish imkoniyatlari o'rganildi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, MSE turli regressiya modellari, neyron tarmoqlar, vaqt qatorlari asosidagi prognozlar va muhandislik hisob-kitoblarini solishtirishda, shuningdek eng maqbul yechimni tanlashda samarali vositadir. Shunday qilib, bu funksiya model aniqligini oshirish, xatoliklarni minimallashtirish va ma'lumotlar asosida to'g'ri qarorlar qabul qilishda muhim ahamiyatga ega.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Rasulov, M., Raimova, G., Sarimsakova, D. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. – Toshkent: Iqtisodiyot, 2020.
2. Abdullayev, A., va boshq. Matematik statistika asoslari. – Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2018.
3. Xolboyev, A. Axborot texnologiyalarida matematik modellashtirish. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2019.
4. James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. An Introduction to Statistical Learning. Springer, 2013. Havola (PDF): <https://www.statlearning.com>
5. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. Deep Learning. MIT Press, 2016. Havola: <https://www.deeplearningbook.org>
6. Montgomery, D. C., Jennings, C. L., & Kulahci, M. Introduction to Time Series Analysis and Forecasting. Wiley, 2015. Havola: <https://www.wiley.com/en-us/Introduction+to+Time+Series+Analysis+and+Forecasting>
7. Haykin, S. Neural Networks and Learning Machines. Pearson, 2010.