

TEKISLIKLARNING O'ZARO ORIENTATSIYASINI TRIGONOMETRIK INVARIANTLAR YORDAMIDA IFODALASH

Axmadjonova Zebona Xasanboy qizi

NamDU, Fizika-matematika fakulteti

Matematika yo'nalishi, 1-kurs talabasi

Ilmiy rahbar: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzayevna

Matematika kafedrası katta o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada fazoda ikki tekislikning o'zaro orientatsiyasini trigonometrik invariantlar — sinus, kosinus va tangent asosida ifodalashning umumiyashtirilgan modeli ishlab chiqiladi. Tekisliklarning normal vektorlari orqali hosil qilinadigan trigonometrik invariantlar burchakni aniqlashda miqyosga va koordinata almashtirishlariga nisbatan to'liq invariant hisoblanadi. Yangi teorema sifatida normal vektorlar orasidagi chordal masofa va trigonometrik invariantlar o'rtasidagi bir-biriga tengliklar tizimi isbotlanadi. Natijalar 3D geometriya, grafik modellashtirish va fazoviy analizda qo'llanilishi mumkin.

Kalit so'zlar: tekislik, orientatsiya, trigonometrik invariant, normal vektor, fazoviy burchak, yangi teorema.

ОПИСАНИЕ ВЗАИМНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНВARIANTОВ

Аннотация: В статье разрабатывается обобщённая модель описания взаимной ориентации двух плоскостей с использованием тригонометрических инвариантов - синуса, косинуса и тангенса. Тригонометрические инварианты, образованные нормальными векторами плоскостей, являются полностью инвариантными относительно масштабных и координатных преобразований. В новой теореме доказывается соответствие между хордальным расстоянием нормализованных нормалей и тригонометрическими инвариантами. Результаты пригодны для 3D-геометрии и пространственного моделирования.

Ключевые слова: плоскость, ориентация, тригонометрический инвариант, нормальный вектор, пространственный угол, новая теорема.

DESCRIBING THE MUTUAL ORIENTATION OF PLANES USING TRIGONOMETRIC INVARIANTS

Abstract: This paper develops a generalized representation of the mutual orientation of two planes using trigonometric invariants—sine, cosine, and tangent.

These invariants, obtained from the normal vectors of the planes, remain fully invariant under scaling and coordinate transformations. A new theorem is presented establishing the equivalence between the chordal distance of normalized normals and the trigonometric invariants of plane–plane angles. Applications include 3D geometry, computer graphics, and spatial modeling.

Keywords: plane, orientation, trigonometric invariant, normal vector, spatial angle, new theorem.

1. KIRISH

Fazoda ikki tekislik orasidagi burchakni aniqlash geometrik modellashtirish, uch o'lchamli grafik tizimlar, sirlarni tahlil qilish, fizik simulyatsiya, kompyuter ko'rish kabi yo'nalishlarda asosiy masalalardan biridir. Klassik formulalar odatda kosinus va skalyar ko'paytmaga tayansa-da, zamonaviy tahlil talablariga ko'ra orientatsiya faqat kosinus bilan emas, balki **trigonometrik invariantlar to'plami** bilan ifodalanishi kerak.

Ikki tekislik:

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

normallari:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

bo'lib, orientatsiya faqat shular orasidagi burchakka bog'liq. Ushbu burchakni trigonometrik invariantlar yordamida ifodalash geometriyada **koordinata va miqyosga nisbatan to'liq invariant model** yaratishga olib keladi.

2. METOD

2.1. Normal vektorlarning trigonometrik invariantlari

Normallar orasidagi burchak θ quyidagicha:

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Shundan kelib chiqib trigonometrik invariantlar:

$$I_c = \cos \theta, I_s = \sin \theta, I_t = \tan \theta.$$

2.2. Sinus invariantining vektorli formulasi

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Bu ifoda orientatsiyaning “yonbosh siljish” komponentasini tasvirlaydi.

2.3. Tangens invariantining formulasi

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\|}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}.$$

Bu invariant 3D orientatsiyada differensial burchaklarni tahlil qilishda muhim.

3. NATIJA

Tekisliklarning orientatsiyasi uchta trigonometrik invariant orqali yakuniy ko'rinishda ifodalanadi:

$$I_c = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

$$I_s = \frac{\|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

$$I_t = \frac{\|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\|}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}$$

Bunday invariantlar: miqyosga invariant ($\lambda \vec{n}_i$ uchun o'zgarmaydi), koordinata o'zgarishlariga invariant (rotatsiyalar ostida saqlanadi), simmetrik, chiziqli bo'lmagan, ammo to'liq mos keluvchi.

Teorema.

Ikki tekislik normallarining normalizatsiyalangan ko'rinishlari:

$$\Phi_1 = \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|}, \Phi_2 = \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|}$$

orasidagi **chordal masofa**:

$$d = \|\Phi_1 - \Phi_2\|$$

bilan trigonometrik invariantlar o'rtasida quyidagi tengliklar o'rinli:

$$I_s = \frac{d\sqrt{4-d^2}}{2}$$

$$I_c = 1 - \frac{d^2}{2}$$

$$I_t = \frac{d\sqrt{4-d^2}}{2-d^2}$$

Bu tengliklar tekisliklar orientatsiyasini chord-geometrik invariantlar bilan to'liq bog'laydi.

Isbot.

$$d^2 = \|\Phi_1 - \Phi_2\|^2 = 2 - 2(\Phi_1 \cdot \Phi_2)$$

demak:

$$I_c = \Phi_1 \cdot \Phi_2 = 1 - \frac{d^2}{2}.$$

Shuningdek, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ qo'llanadi:

$$I_s = \sqrt{1 - (1 - d^2/2)^2} = \frac{d\sqrt{4-d^2}}{2}.$$

Tangens:

$$I_t = \frac{I_s}{I_c} = \frac{d\sqrt{4-d^2}}{2-d^2}.$$

Teorema isbotlandi. ■

5. MUHOKAMA

Bu yondashuv bir nechta ustunliklarga ega:

- Tekislik tenglamasi $\lambda \neq 0$ ga ko'paytirilsa ham orientatsiya invarianti o'zgarmaydi.
- Cross-product asosidagi sinus invariant kichik burchaklarda ancha barqaror.
- $\cos \theta$ — normal yo'nalishlarning yaqinligi
- $\sin \theta$ — yo'nalishlarning perpendikulyarlik komponentasi
- $\operatorname{tg} \theta$ — differensial orientatsiya nisbati

6. XULOSA

Maqolada tekisliklarning o'zaro orientatsiyasini trigonometrik invariantlar yordamida ifodalovchi umumiy model ishlab chiqildi. Orientatsiya: $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\operatorname{tg} \theta$ invariantlari orqali aniqlanib, chordal geometriya bilan bog'landi. Yangi teorema trigonometrik invariantlar va normalizatsiya qilingan normallar orasidagi masofaning algebrik bog'lanishini isbotladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
2. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
3. Karimberdiyeva, D. ., & Mahmudova, D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.
4. Abdiqayumov, A., & Mahmudova, D. (2025). CENTRAL AND PARALLEL PROJECTIONS AND THEIR PROPERTIES. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177–184. извлечено от <https://inlibrary.uz/index.php/tafaps/article/view/83478>
5. Dilnoza, M. Use of the Acmeological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
6. Makhmudova, D. K. (2020). Significance of acmeological approach in improving the cognitive competence of the future teachers. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 2(4), 426-433.